LISTADO DE LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DESDE JUNIO 2006 A DICIEMBRE 2020

Año 2006

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2006.pdf)

PROBLEMA 001

Sea el espacio vectorial V de los polinomios de grado menor o igual que tres con coordenadas reales, y sea $B=\{1,x,x^2,x^3\}$ una base. Se pide:

Obtener la base dual $\widehat{B}$ en el espacio dual $\widehat{V}$.

Si $F(\varphi)=\varphi(4)$ es una forma lineal, hallar sus coordenadas respecto de la base dual $\widehat{B}$.

Hallar las coordenadas en la base dual $\widehat{B}$ de la forma lineal:

$$I(\varphi)=\int_0^1 \varphi(x).dx$$

PROBLEMA 002

Resuelva la ecuación

$$2x^3-9x^2+32x+75=0$$

sabiendo que admite una raíz compleja de módulo 5.

PROBLEMA 003

Sea *M* el conjunto de las matrices ortogonales del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad donde\ \ a,b,c,d\in R$$

y sea *f* la aplicación definida del siguiente modo:

$$f: M\to R^4$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & b & c & d\end{pmatrix}$$

Justifique con detalle que el conjunto imagen de *M* mediante la aplicación *f* es un conjunto cerrado del espacio topológico de cuatro dimensiones R^4.

PROBLEMA 004

Dada la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ donde:

$$f_n(x)=\frac{nx-1}{(x.L(n+1))(1+nx^2.Ln)},\quad 0\leq x\leq 1,\quad n=1,2,\ldots$$

Calcular $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x).dx$ y $\int_0^1 (\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)).dx$

Explicar la aparente contradicción de los resultados.

PROBLEMA 005

Se considera el conjunto *N* de los números naturales dotado de la *topología cofinita T* (los abiertos son los complementarios de los conjuntos finitos).

1) ¿Es *(N, T)* espacio topológico?.
2) ¿Es Hausdorff?.
3) ¿La sucesión *{1,2,...,n,...}* converge?. ¿A qué punto?.
4) ¿Existe en *(N, T)* alguna sucesión que converja a un solo punto?.
5) ¿Existe alguna sucesión que no converja?.

PROBLEMA 006

Sea la superficie:

$$\begin{cases} x = u + uv^2 - u^3/3 \\ y = v + u^2v - v^3/3 \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

Determinar:
a) Las dos primeras formas cuadráticas fundamentales.
b) Las direcciones principales asociadas a cada punto.
c) Las líneas asintóticas.
d) Los radios de curvatura principales.

PROBLEMA 007

Desarrollar en serie de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n.z^n$ la función de variable compleja:

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^4}$$

determinando el radio de convergencia y la expresión del coeficiente a_n en función de *n*. Determine asimismo los residuos de la función y calcule la integral:

$$\int_\gamma \frac{dz}{(1+z^2)^4}$$

donde γ es el camino que en coordenadas polares tiene por ecuación:

$$\rho = \sqrt{|2.\cos 2w|} \qquad 0 \le w \le 2\pi$$

PROBLEMA 008

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos desde donde se pueden trazar dos tangentes, que formen entre sí ángulo recto, a la curva:

$$x.y^2 = 1$$

Año 2007

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2007.pdf)

PROBLEMA 009

Computar:

1º) $Hom_z(Z, Z_n)$
2º) $Hom_z(Z_m, Z_n)$
3º) $Hom_z(Z_m, Z)$
4º) $Hom_z(Q, Z)$
5º) $Hom_z(Q, Q)$

Siendo:

Z: Anillo de los enteros.
Q: Cuerpo de los racionales.
Z_k: Clases de enteros módulo k.
$Hom_z(A, B)$: Homomorfismos de A en B.

PROBLEMA 010

Sea $g : R^3 \to R^3$ definida por

$$g(x,y,z) = \left(e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y\right)$$

a) Probar que *g* es diferenciable y posee inversa diferenciable en un entorno de cada punto.
b) Probar que *g* no solo es inyectiva localmente sino que lo es globalmente.
c) Sea *A* el dominio limitado por los planos
x=0, y=0, z=0, y=1, x+z=1
Calcular el volumen de *g(A).*

PROBLEMA 011

Sea P_n el número de permutaciones *u* del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ tales que $\forall x \in \{1,2,\ldots,n\}$, se cumple la condición de que $u(x) \neq x$.

a) Establecer la relación:

$$n! = P_n + \binom{n}{1}.P_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2}.P_2 + 1$$

b) Calcular: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{P_n}{n!}$

PROBLEMA 012

Situar histórica y matemáticamente a GAUSS, CAUCHY, HILBERT, BOURBAKI, COHEN y GALOIS.

(nombre completo, fecha y lugar de nacimiento y fallecimiento, en su caso, y mención resumida de su trabajo)

PROBLEMA 013

Un punto móvil, *M(x,y,z)*, tiene por coordenadas, en función del tiempo *t*:

$$x(t) = (1+m).\cos(1-m).at + (1-m).\cos(1-m).at$$
$$y(t) = (1+m).sen(1-m).at + (1-m).sen(1-m).at$$

Se desea la expresión de *z(t)* sabiendo que el vector velocidad de *M* forma un ángulo igual a *m.a.t* con el eje *OZ.*

PROBLEMA 014

Dado un cuadrilátero completo, se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de uno de los triángulos definidos por tres de los lados del cuadrilátero. Demostrar que dicho triángulo es homológico con el triángulo diagonal y que el eje de homología no depende de la elección del primer triángulo.

PROBLEMA 015

Si *a* es un elemento de un grupo, *(G,.),* sea S_a la permutación del conjunto *G* que a cada *x€G* le asigna el elemento *a.x*. Demostrar que si *G* es de orden par, la permutación S_a es par.

PROBLEMA 016

Como material para realizar experimentos aleatorios se dispone únicamente de dados (con caras numeradas de 1 al 6). Se desea:

a) Enunciar (clara y detalladamente, encerrándola en un recuadro) una regla, lo más sencilla posible, para efectuar un sorteo que permita adjudicar un premio a uno de los 67 jugadores, de modo que todos ellos tengan igual probabilidad de recibirlo.
b) Organizar un juego entre cinco jugadores que efectuarán apuestas iguales; para decidir el resultado de una partida se arrojan p dados iguales (a la vez, de modo que no debe considerarse el orden de los p resultados obtenidos); si dos de los dados presentan números iguales, la partida es nula y los jugadores recuperan sus apuestas; si los p dados presentan resultados diferentes, un solo jugador gana todo lo aportado. Para proceder así hay que elegir un valor conveniente de p y una regla que permita decidir el ganador a partir del resultado obtenido. Dar, en la forma indicada antes, una regla tal, con el valor de p, de modo que el juego resulte equitativo.
c) Problema análogo al caso b) para cuatro jugadores, en lugar de cinco.

PROBLEMA 017

Hallar las superficies en las que se verifique que el punto medio del segmento de normal comprendido entre la superficie y el plano XY está sobre

$$z^2 = x + y$$

PROBLEMA 018

Probar que para que la ecuación con coeficientes reales

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \;\; a \neq 0$$

tenga todas sus raíces de módulo unidad es necesario y suficiente que se cumpla:

$$\begin{array}{ll} a = e & |4a| \geq |b| \\ b = d & |2a + c| \geq |2b| \\ 8a^2 + b^2 \geq 4ac & 2a^2 + ac \geq 0 \end{array}$$

PROBLEMA 019

Sea 2Z el anillo de los enteros pares.

a) ¿Cuáles son los ideales principales de 2Z?.
b) ¿Cuáles son los ideales primos de 2Z?.
c) ¿Cuáles son los ideales maximales de 2Z?.
d) ¿Todo ideal maximal es primo?.
e) Si es I un ideal maximal de 2Z, ¿es 2Z/I un cuerpo?.

PROBLEMA 020

Desarrollar en serie y estudiar la convergencia de la expresión

$$y = x.arctgx - L\sqrt{1+x^2}$$

PROBLEMA 021

a) Siendo $a_n(x) = n.x.e^{-nx^2}$ averiguar si

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 a_n(x).dx = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} a_n(x).dx$$

b) Explicar el porqué del resultado obtenido en a).

Año 2008

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2008.pdf)

PROBLEMA 022

Sea la superficie S definida por

$$x = 2z.f(t) - \frac{4}{3}t^3$$
$$y = z.f'(t) - f(t)$$

c) Comprobar que se trata de una superficie reglada.
d) Hallar *f(t)* para que S sea desarrollable.
e) Pongamos en S que *f(t)=t.* Encontrar en un punto genérico el radio de curvatura y el plano osculador de la curvatura contenida en S y definida por la ecuación $(z - 6t).dt + t.dz = 0$, pasando por *A(t,z)=(1,3).*

PROBLEMA 023

Se supone en R^2 un sistema de referencia ortogonal *OXY*. Hallar la ecuación de la envolvente de los ejes radicales de dos circunferencias *C* y *C'*, donde la circunferencia *C* es fija y tiene su centro en el eje *OY*, y la circunferencia *C'* es variable con centro en *OX* y tangente a la parábola $y^2 = 2x$.

PROBLEMA 024

Se considera la función *f* definida en los intervalos *(0,1)* y (1,+00) por

$$f(x) = \frac{x.Lx}{x^2 - 1}$$

Se pide:

a) Demostrar que eligiendo convenientemente *f(o)* y *f(1)* la función *f* es continua y derivable para $x \geq 0$.
b) Estudiar la variación de la función y construir su gráfica.

PROBLEMA 025

Sea V es espacio vectorial de las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ y T el endomorfismo de V dado por

$$T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos(x - t)).f(t).dt, \quad f(t) \in V$$

Se pide:

a) Probar que *T(V)* es de dimensión finita y hallar una base.
b) Determinar *Ker(T).*
c) Hallar los valores propios y los vectores propios de T.

PROBLEMA 026

Hallar la ecuación de una cuádrica con centro en O*(1,-2,-1)* sabiendo que

d) Tiene un cono asintótico $Y \equiv x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xz = 0$.
e) Los puntos *M(1,1,0)* y *N(0,3,1)* son conjugados respecto de ella.

PROBLEMA 027

Sea *f* la función de variable compleja:

$$f(z)=\frac{z^2}{\left(1+z^2\right)^2}$$

y *C(0,2)* la circunferencia de centro *0* y radio *2*.
Obtener una expresión del desarrollo de Laurent de f(z) válido en:

a1) El conjunto de los complejos z con $|z|<1$.

a2) Idem con $|z|>1$.

Hallar: $\int_C f(z).dz$

Si g(x) es la función dada por $g(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$, determinar: $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.dx$

Razonando previamente la convergencia.

PROBLEMA 028

Dada la función $f(x)=\frac{K}{1+x^2}$ definida en $(-\infty,+\infty)$, se pide:

a) Determinar *K* para que *f(x)* sea una función de densidad.
b) Hallar la función de distribución.
c) Calcular la probabilidad $p(-2\leq X\leq +2)$.

PROBLEMA 029

Sea (X,T) un espacio topológico, y $f: XxR^2 \to R$ una aplicación continua (R y R^2 con la topología usual). Sea p un punto de X, y M el conjunto de R^2 dado por

$$M=\{(x,y)\in R^2, 0\leq x\leq 1, y=0\}$$

d) Si $0\notin f(\{p\}xM)$, estudiar si existe un entorno U de M en R^2 tal que $0\notin f(\{p\}xU)$.
e) Demostrar que el conjunto de puntos $p\in X$ tal que para todo $q\in M$ es $f(p,q)\neq 0$, es abierto en X.

PROBLEMA 030

Se considera la ecuación diferencial

$$y' = máx\{x-2, y\}$$

a) Demostrar la existencia y unicidad de una función definida en *R*, de clase $C^1(R)$, que la satisfaga y verifique la condición *y(0)=0* sin construirla explícitamente.
b) Hallar la expresión de dicha función solución comprobando que es de clase $C^1(R)$.

PROBLEMA 031

Se corta un tetraedro regular por un plano paralelo a dos aristas opuestas. Describir la figura que forma la sección y hallar en qué situación es máxima su área.

PROBLEMA 032

Los animales de una cierta raza se clasifican en tres clases según que posean dos genes del tipo G (clase de los dominantes, que denotaremos por 1), un gene del tipo G y otro del tipo g (clase de los híbridos, que denotaremos por 2) o dos genes del tipo g (clase de los recesivos, que denotaremos por 3). Se supone que la reproducción en esta raza de animales se hace siempre por cruce con un animal de la clase dominante (y otro de la clase i, para i=1,2,3) y que los hijos heredan siempre un gene de cada padre, con la misma probabilidad (=1/2) en el caso en que pueda ser G ó g.

Denotemos por $p_{i,j}$ la probabilidad de que un animal de la clase j haya sido engendrado por intervención de otro de la clase i. Sea P la matriz $P=(p_{i,j})$, con $i,j=1,2,3$. Denotemos por p_i^{n+1} la probabilidad de que en la generación $n+1$ nazca un animal de la clase i y pongamos

$$P^{n+1}=\left(p_1^{n+1},p_2^{n+1},p_3^{n+1}\right)$$

Se pide:

1. Determinar la matriz P^{n+1} en función de n y de la matriz P^1 de la composición probable inicial de la población.

2. Suponiendo que dicha composición inicial sea $p_1^1=1/5,\ p_2^1=3/5,\ p_3^1=1/5$, determinar la composición probable P^{n+1} al cabo de n+1 generaciones. Hallar la composición límite p^{∞} cuando el número de generaciones tiende hacia el infinito.

PROBLEMA 033

Se considera la función de variables compleja

$$f(z)=\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^3$$

definida en su dominio de holomorfía en el plano complejo. Se pide:

1) Obtener el desarrollo en serie de potencias de z en un entorno del punto $z=0$, indicando su campo de convergencia.

2) Obtener el desarrollo en serie de potencias de z en un entorno del punto $z=\infty$, del plano complejo ampliado, indicando su campo de convergencia.

3) Calcular la integral $\int_C f(z).dz$, siendo *C* la circunferencia de centro *0* y radio *2*, recorrida una sola vez en sentido positivo.

PROBLEMA 034

Hallar el área de la porción de superficie definida por las condiciones

$$(x.\cos\alpha+y.sen\alpha)^2+z^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \qquad (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

respecto de un sistema cartesiano de ejes rectangulares en el espacio.

Año 2009

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2009.pdf)

PROBLEMA 035

Se considera la circunferencia que pasa por los puntos P(4,0), Q(0,2) y tiene su centro en la bisectriz del primer cuadrante.
Hállense las ecuaciones de las dos tangentes a la circunferencia trazadas desde el origen de coordenadas.

PROBLEMA 036

Calcular

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(a+\sqrt{n^2+a^2}\right)\left(2a+\sqrt{n^2+4a^2}\right)\ldots\left(na+\sqrt{n^2+n^2a^2}\right)}$$

PROBLEMA 037

En una urna hay dos bolas, una blanca y la otra negra. Se saca una bola y se devuelve a la urna acompañada de otra del mismo color. Continuando del mismo modo, se llegará a tener en la urna 22 bolas, ¿cuál es la probabilidad de que en ese momento 11 sean blancas y 11 negras?

PROBLEMA 037

Sea f una aplicación continua de un espacio de Haussdorff compacto X en sí mismo. Demostrar que existe un conjunto cerrado $Y \subset X, Y \neq 0$ tal que $f(Y) = Y$.

PROBLEMA 038

Hallar la relación existente entre los coeficientes de las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} z^3 + p_1 z - q_1 &= 0 \\ z^3 + p_2 z - q_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (ambas con raíces complejas)}$$

Para que los triángulos que determinan los afijos de las raíces de cada una de ellas sean semejantes.

PROBLEMA 039

La longitud de un tornillo se distribuye del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1)(3-x) & si\ x \in [1,3] \\ 0 & si\ x \notin [1,3] \end{cases}$$

siendo *f(x)* la función de densidad. Sólo son válidos los tornillos comprendidos entre 1'7 y 2'4.
Calcular la probabilidad de que una pieza determinada sea útil.
Si las piezas se empaquetan en lotes de 5 unidades y se acepta el lote si contiene menos de dos piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado?.

PROBLEMA 040

En el plano R^2, con su topología habitual, se consideran los conjuntos

$$A = \{(x,y)\in R^2,\ x^2+y^2=1\} \text{ y } B = \{(x,y)\in R^2,\ y=1\}$$

llamando $X = A\bigcup B$, sean T_A, T_B y T_X las topologías subordinadas por R^2 respectivamente en A, B y X. Se pide:

1º) Estudiar:

a) Si el conjunto B es cerrado y si es abierto en (X,T_X).

b) Si el conjunto A es entorno de los puntos $P(x=1,y=0)$ y $Q(x=0,y=1)$ en el espacio topológico (X,T_X).

c) Si los espacios (X,T_X) y (A,T_A) son compactos.

2º) Siendo $M = \{(x,y)\in R^2,\ y=x^2\}$ y $f: R^2 \to R^2$ es una aplicación continua tal que $f(A)\bigcap M = \Phi$, demostrar que existe un abierto U de R^2 tal que $A\subset U$ y $f(U)\bigcap M = \Phi$

PROBLEMA 041

En el espacio euclídeo de 3 dimensiones, y con referencia a tres ejes coordenados rectangulares X, Y, Z, se considera el cilindro que tiene por generatrices rectas paralelas a la recta r de ecuación

$$r \equiv \begin{cases} z = \sqrt{3}x \\ y = 0 \end{cases}$$

y directriz la curva c de ecuación

$$c \equiv \begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Determinar las líneas situadas en este cilindro que sean de pendiente máxima respecto del plano z=0.

PROBLEMA 042

Determínense las ecuaciones de las envolventes a los siguientes haces de curvas:

a) $x^2 = p.(2y-p)$ $\quad p$: parámetro

b) $x^2 + (y-q)^2 = q$ $\quad q$: parámetro

c) $x^2 + y^2 - \dfrac{r^2}{2}x - 2ry = 0$ $\quad r$: parámetro

PROBLEMA 043

Integrar, por desarrollo en serie, la ecuación diferencial:

$$y' = x^2 + y$$

PROBLEMA 044

Un buque de carga, navegando 200 horas entre dos puntos situados en el Ecuador, ha recorrido 32º15'30". Se pide:

1º. Calcular en millas por hora la velocidad del barco (la milla es 1' de arco aproximadamente).
2º. Diferencia de horas en ambos puertos.
3º. El capitán conserva un reloj con la hora del puerto de partida y en un momento determinado se da cuenta de que está atrasado 20 minutos con la hora justa del punto en que se halla. ¿Qué diferencia de longitud existe entre aquel puerto y este punto?.

PROBLEMA 045

Dada la cónica $x^2 - y^2 - 1 = 0$. Se pide:

La matriz de dicha cónica.
La recta polar del punto $P(3,1)$.
Calcular a para que el punto $Q(a,2)$ sea conjugado de $P(3,1)$.
Determinar el polo de la recta $y=2x+1$.

PROBLEMA 046

Hallar el área de la superficie engendrada al girar un arco de cicloide

$$\begin{cases} x = a.(t - sent) \\ y = a.(1 - \cos t) \end{cases}$$

alrededor de su eje de simetría.

Año 2010

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2010.pdf)

PROBLEMA 047

Clasificar la cónica siguiente

$$13.x^2 + 5.y^2 + 4.xy - 26.x - 22y + 23 = 0$$

Obtener su ecuación reducida y representarla en un diagrama cartesiano.

PROBLEMA 048

Determinar los puntos singulares de las curvas siguientes:

a) $(x_2 - 1)^3 + (x_2 - 1)^2 - (x_1 + 1)^2 = 0$
b) $x_2^2 - x_1^3 = 0$

PROBLEMA 049

Ecuación de la superficie que contiene a la hipèrbola:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

y que satisface la ecuación diferencial

$$xy(p - q) = (x - y)z$$

$$(\, p = dz/dx,\ q = dz/dy)$$

PROBLEMA 050

Calcular los valores de: a) $L(-4)$, b) Li, c) $L(1+i)$, d) $\log_{-1}(i)$.

PROBLEMA 051

Determinar una curva que pasa por el punto (3,2) y para la cual la longitud del segmento de cualquiera de sus tangentes comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido por el punto de contacto en dos partes iguales.

PROBLEMA 052

Sean r y r' dos rectas perpendiculares y sea D su punto de intersección. Sobre r tomamos un punto A fijo y sobre r' dos puntos M y N variables de modo que $DM.DN=c^2$. Se trazan las perpendiculares a las rectas AM y AN por los puntos M y N respectivamente.

Determinar el lugar geométrico del punto X de intersección de dichas perpendiculares.

PROBLEMA 053

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide calcular:

1) Los autovalores.
2) Los autovectores.
3) La matriz diagonal semejante, si existe.

PROBLEMA 054

Sea X una variable aleatoria cuya Función de Distribución es la siguiente

$$F(x) = \begin{cases} 0 & para\ x \leq -2 \\ x/4 + 1/2 & para\ -2 < x \leq 2 \\ 1 & para\ x > 2 \end{cases}$$

Se pide calcular:

4) La esperanza matemática de X.
5) La varianza.
6) $p[X \leq 1]$.
7) $p[1 < X \leq 2]$
8) $p[X > 3]$

PROBLEMA 055

Hallar la descomposición canónica de la función

$$f : Q \to Q$$

Definida del siguiente modo: $f(x) = [x]$, donde $[x]$ representa el máximo número entero menor o igual a x.

PROBLEMA 056

1) Hallar la ecuación de las superficies cuyo plano tangente en cada punto corte al eje OZ en un punto de cota igual y de signo contrario a la cota del punto de contacto.

2) Determinar entre estas superficies la que contiene a la hipérbola equilátera

PROBLEMA 057

1) Defínase derivada direccional y las superficies equipotenciales.
2) Hallar la derivada direccional de $F = x^2yz^3$ a lo largo de la curva

$$\begin{aligned} x &= e^{-u} \\ y &= 2senu + 1 \\ z &= u - \cos u \end{aligned}$$

3) Demostrar que la máxima variación de F, es decir, la máxima derivada direccional, se verifica en la dirección del vector $\vec{\nabla}F$ y tiene su magnitud.

4) Hallar la derivada direccional de $U = 2x^3y - 3y^2z$ en $P(1,2,-1)$ en una dirección hacia $Q(3,-1,5)$. ¿En qué dirección a partir de P es máxima la derivada direccional?. ¿Cuál es la magnitud de la derivada direccional máxima?

PROBLEMA 058

Sean X e Y espacios topológicos.

a) Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función constante, por ejemplo $f(x) = c \in Y, \forall x \in X$, entonces f es continua respecto a cualquier topología τ del espacio X y a cualquier topología τ^* del espacio Y.
b) Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función cualquiera y (Y, γ) es un espacio topológico indiscreto, entonces $f : (X, \tau) \to (Y, \gamma)$ es continua, cualquiera que sea la topología τ.

PROBLEMA 059

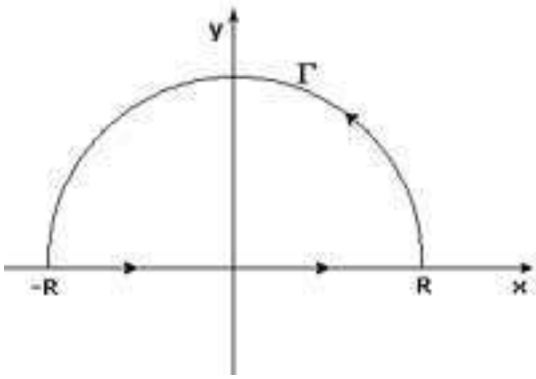
a) Hallar la tabla de multiplicar de S_3, grupo simétrico del conjunto $X = \{1,2,3\}$.
b) Probar que $R = \{i, \sigma_1, \sigma_2\}$ es subgrupo de S_3, siendo

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Año 2011

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2011.pdf)

PROBLEMA 060 (220111)



a) Si $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, para $z = R.e^{i\theta}$, donde k>1 y M son constantes, demostrar que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} f(z).dz = 0$$

siendo Γ el arco semicircular de la figura.

b) Calcular: $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

PROBLEMA 061 (190211)

Calcular la integral

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy$$

donde C es la mitad superior de la elipse

$$\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.sen\, t \end{cases}$$

que se recorre en el sentido de las agujas del reloj.

PROBLEMA 062 (190311)

a) Indíquese la manera de integrar ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables.
b) Intégrense las ecuaciones diferenciales siguientes:

1) $y' = (x+1).y$

2) $\frac{\cos x}{1+e^y}dx + 2dy = 0$

PROBLEMA 063 (160411)

Determinar la distancia existente entre los dos puntos A y B de la superficie terrestre que se indican mediante sus coordenadas geográficas (la primera es la longitud y la segunda la latitud): *A(-13º, 0º), B(17º, 45º)*.

PROBLEMA 064 (140511)

Demostrar que los números *49, 4489, 444889, ...,* obtenidos colocando el número *48* en medio del número anterior, son cuadrados de números enteros.
(propuesto en 1988, XXV Olimpiada Matemática, fase de Sevilla, España)

PROBLEMA 065 (110611)
Determinar en función de b>1 el valor de la integral:

$$\varphi(b)=\int_0^b |x-1|.\cos x.dx$$

PROBLEMA 066 (090711)
Demostrar que si la ecuación de cuarto grado $x^4+mx^2+n=0$ tiene cuatro raíces distintas en progresión geométrica, entonces el coeficiente m es nulo.

PROBLEMA 067 (060811)
a) Para la variable aleatoria X, y la función de densidad en *(a,b)* dada por $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, calcular la esperanza matemática *E[X]* (momento central de primer orden), el momento central de orden k y la varianza.
b) Probar que si la función de densidad es $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}, \forall x \in R$, entonces no existe la esperanza matemática *E[X]*.

PROBLEMA 068 (030911)
Encontrar dos números impares de dos cifras tales que si se permutan sus cifras resultan dos números distintos, y, sin embargo, su producto coincide con el producto de los dos primeros.
Propuesto en la Olimpiada Matemática Española 1988, fase de Sevilla.

PROBLEMA 69 (011011)
En un cubo de arista *a* se considera una diagonal *D* del mismo y la diagonal *d* de una de sus caras, de modo que las rectas que contienen los segmentos *D* y *d* se crucen. Hallar la distancia *x* de *D* a *d*.

PROBLEMA 70 (291011)
Sea n un nº natural. Probar que el último dígito del nº $1+2+3+\ldots+n$ nunca podrá ser *2, 4, 7* o *9*.
(Olimpiada Matemática Española, 1977)

PROBLEMA 71 (261111)

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+3x=0\\ \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}-2y=e^{2t}\end{array}\right\}$$

PROBLEMA 72 (241211)

Sea un espacio topológico compacto (X,T) y una aplicación continua

$$f:(X,T)\to(Y,T')$$

Demuéstrese que $f(X)$ es compacto y que, en particular, si f es además sobreyectiva, entonces Y es también compacto.

:

Año 2012

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2012.pdf)

PROBLEMA 73 (210112)

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{1+x^2}, & 0\le x\le 1\\ 0, & en\ el\ resto\end{cases}$$

a) Calcular el valor de c para que $f(x)$ sea una función de densidad.
b) Hallar la función de distribución.
c) Esperanza matemática de la variable x que tiene por función de densidad $f(x)$.

PROBLEMA 74 (180212)

Sea U el conjunto de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Donde a, b, c y d son enteros tales que $ad\text{-}bc=1$. Encuentre el conjunto de todas las matrices de U que verifican:

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

PROBLEMA 75 (170312)

En una ciudad el 55% de la población consume aceite del tipo A, el 30% del tipo B y el 20% de ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:

1. Si ésta consume aceite del tipo A, ¿Cuál es la probabilidad de que consuma también del tipo B?.
2. Si consume del tipo B, ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma del tipo A?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma del tipo A ni del tipo B?

PROBLEMA 76 (140412)

Determinar la curvatura total y la curvatura media de las superficies de revolución de ecuación

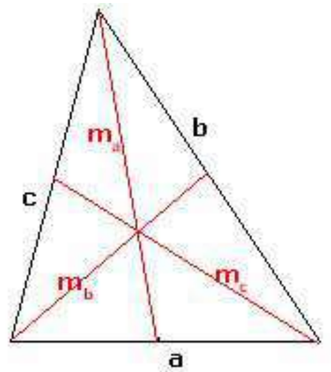
$$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

PROBLEMA 77 (120512)

Probar que $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ es un número entero. Determinarlo.

PROBLEMA 78 (090612)

Demostrar que en un triángulo cualquiera la razón entre la suma de los cuadrados de sus lados y la suma de los cuadrados de sus medianas es 4/3.



$$\frac{a^2+b^2+c^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}=\frac{4}{3}$$

PROBLEMA 79 (070712)

a) Determinar a y b para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-y+z=2 \\ 3x-y-az=b \end{cases}$$

Se corten en una recta r.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(2,1,3)$.

PROBLEMA 80 (040812)

Calcular

$$\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z-1)(z+3)^2}$$

siendo C dada por

a) $|z|=3/2$, b) $|z|=10$.

PROBLEMA 81 (010912)

Hállese la ecuación cartesiana del plano normal a la hélice circular

$$x=a.\cos t$$
$$y=a.sent$$
$$z=k.t$$

en el punto $t=0$.

PROBLEMA 82 (290912)

Estudiar la convergencia de la integral

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^n}}$$

PROBLEMA 83 (271012)

a) Determínense los campos de convergencia de las series

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n.3^n} \quad \text{y} \quad \sum_{1}^{\infty} (1-x).x^n$$

b) Estúdiese la convergencia uniforme de la serie $\sum_{1}^{\infty} (1-x).x^n$ en el intervalo *(-1/2,1/2)*.

PROBLEMA 84 (241112)

En el anillo *R[x]* de los polinomios se considera el ideal I de los múltiplos de $x^2 - 1$. Se pide:

c) Probar que todo elemento del anillo cociente $A = R[x]/I$ admite un representante de grado menor o igual a uno.
d) Razonar si A posee divisores de cero.
e) ¿Es A un cuerpo?.

PROBLEMA 85 (221212)

Un número natural tiene dos factores primos y ocho divisores naturales. La suma de sus divisores es 320. Hallar dicho número.

Año 2013

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2013.pdf)

PROBLEMA 86 (190113)

Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

PROBLEMA 87 (160213)

1. Dado un conjunto G, con estructura de grupo respecto a una ley interna, *, demostrar que el conjunto H de los elementos de G que permutan con cualquier otro elemento de G, constituyen un grupo, llamado *centro del grupo G, con respecto a la misma ley interna *.*
2. En el grupo de los movimientos de igualdad que dejan invariante a un cuadrado, encontrar el centro H de dicho grupo.

PROBLEMA 88 (160313)

Se considera un octaedro regular de arista 1 cm. Determinar las dimensiones del cilindro de revolución de volumen máximo inscrito en dicho octaedro cuyo eje esté sobre la diagonal.

PROBLEMA 89 (130413)

Calcular:

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{-x^2 - 2x}.dx$$

a) Usando el significado geométrico de la integral definida.
b) Mediante un cambio de variables.

PROBLEMA 90 (110513)

Dado un número positivo, **n**, hallar la suma de todos los números positivos inferiores a **10.n**, que no sean múltiplos de **2** ni de **5**.

PROBLEMA 91 (080613)

Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie representada por

$$\vec{X} = \left(u, v, u^2 - v^2\right)$$

en el punto correspondiente a $u=1$, $v=1$.

PROBLEMA 92 (060713)

Utilizar el procedimiento de decisión llamado "método de reducción al absurdo" para comprobar si es verdadera la proposición

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

PROBLEMA 93 (030813)

Determínese algún procedimiento de cálculo para el centro de una cónica.
Determinar las coordenadas del centro de la cónica

$$13x^2 + 5y^2 + 4xy - 26x - 22y + 23 = 0$$

PROBLEMA 94 (310813)

Sea el conjunto **X={1,2,3,4,5}**. Considérense las funciones **f** y **g** definidas de **X** en **X**:

f={<1,3>,<2,5>,<3,3>,<4,1>,<5,2>}
g={<1,4>,<2,1>,<3,1>,<4,2>,<5,3>}

y hállense las funciones compuestas **gof** y **fog**.

PROBLEMA 95 (280913)

Dada la cónica:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y + 8 = 0$$

Determinar la recta polar del punto $(3,2)$, el polo de la recta $2x+3y=-7$ y su centro, si existe.

PROBLEMA 96 (261013)

Hallar el valor de la integral:

$$I = \int_C \frac{sh5z}{(1+z^2)z^2}.dz$$

siendo $|z| = 3/2$

PROBLEMA 97 (231113)

Demostrar que si los tres lados de un triángulo están en progresión geométrica, la razón está comprendida entre $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

PROBLEMA 98 (211213)

Dados los puntos P(0,1,-1) y Q(1,2,0), se pide:

a) Determinar las ecuaciones paramétricas y continuas de la línea recta que contiene a ambos puntos P y Q.
b) Obtenganse las ecuaciones paramétricas y continuas de la línea recta que pasando por el punto P es paralela a la recta de ecuaciones contínuas:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Año 2014

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2014.pdf)

PROBLEMA 99 (150114)

Determinar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que sus lados miden un número entero de centímetros, pero no un número entero de palmos, y que su área expresada en palmos cuadrados es igual a su perímetro expresado en palmos lineales. Longitud de un palmo: 20 cms.

PROBLEMA 100 (120214)

Un test de aptitud se compone de cinco preguntas. En cada una de ellas se proponen tres respuestas, entre las cuales se encuentra la correcta. Si un alumno contesta al azar, se pide:
1) Probabilidad de que conteste bien tres preguntas.
2) Probabilidad de que conteste bien a tres preguntas al menos, que es lo que se pide para ser declarado apto.
3) ¿Cuál es la probabilidad de ser declarado apto si el alumno conoce las respuestas correctas a dos de las preguntas, es decir, si solo contesta al azar a tres de ellas?.

PROBLEMA 101 (120314)

Demostrar por inducción completa que en la sucesión de Fibonacci:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21, \ldots$$

la suma de los n primeros términos más una unidad es igual al término (n+2)-ésimo.

PROBLEMA 102 (090414)

Se considera la diagonal *D* de un cubo de arista *a* y también la diagonal *d* de una de sus caras, elegida de modo que ambas diagonales, *D* y *d*, se cruzan. Se pide la distancia entre las rectas que contienen a ambas diagonales.

PROBLEMA 103 (070514)

Dado un número entero *m*, cuya descomposición primaria es

$$m = a^{\alpha}.b^{\beta}.....l^{\gamma}$$

determinar las fórmulas que dan el número total de sus divisores y la suma y el producto de todos ellos.

PROBLEMA 104 (040614)

Sea

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{sennx}{n^3}$$

Demostrar que

$$\int_0^{\pi} f(x).dx = 2\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

PROBLEMA 105 (020714)

El número natural *N* descompuesto en producto de factores es de la forma:

$$N = a^x.b^y.c^z \text{, siendo } x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$

El número de divisores de *N*, N^2 y N^3 es, respectivamente, *60, 315* y *910*. El *MCD* de todos los posibles valores de *N* es *900*. Hallar todos los valores que puede tomar *N*.

PROBLEMA 106 (300714)

Integrar la función

$$f(x,y,z)=x.y.z$$

En el tetraedro definido por los planos

$$x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$$

PROBLEMA 107 (270814)

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcular las sucesivas potencias de *A*.
2. Sea $B=I+A$ (*I* es la matriz identidad). Expresar B^n en función de *I, A* y A^2.
3. Demostrar que la inversa de *B* es $I-A+A^2$.
4. Expresar B^{-n} en función de *I, A* y A^2.

PROBLEMA 108 (240914)

Obténgase la ecuación de un cono sabiendo que tiene el vértice en *(7,10,4)* y que su directriz es

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1 \\ z=2 \end{cases}$$

PROBLEMA 109 (221014)

Se tiene la ecuación diferencial de primer órden

$$3y'+2y=3x^2+1$$

Se pide su resolución por, al menos, dos métodos diferentes.

PROBLEMA 110 (191114)

Encontrar la ecuación de la Podaria de la elipse respecto al centro. Pasar la ecuación a polares y representarla.

PROBLEMA 111 (171214)

a) Establecer algun modo de resolver las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogeneas con coeficientes variables ($p(x).y'+q(x).y=0$).
b) Aplicarlo a la resolución de la ecuación diferencial $y+(x+3).y'=0$.

Año 2015

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2015.pdf)

PROBLEMA 112 (140115)

a) Demostrar el Teorema de Milne-Thomsom para funciones de una variable compleja: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\to f'(z)=u_x(z,0)-iu_y(z,0)$, $\forall x,y\in R^2$

b) Dada la función $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, hallar otra función $v(x,y)$ tal que la función $w(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ sea función holomorfa de la variable $z=x+iy$.

c) Calcular w(z) en el ejemplo anterior ulilizando el Teorema de Milne-Thomson.

PROBLEMA 113 (110215)

Dada la cónica de ecuación general dada por $4x^2-2y^2+8xy-x+5=0$, se pide:

a) Clasificarla.

b)Obtener su ecuación reducida.

PROBLEMA 114 (110315)

Al quitar un número de una lista de diez enteros consecutivos resulta que la suma de los nueve restantes es 2014. ¿Qué número hemos quitado?

(*Olimpiada Matemática Española 2014*)

PROBLEMA 115 (080415)

Determinar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes trazadas por (-6,0) a las elipses que tienen por semiejes b=3 y *a* (es decir, de ecuación reducida dada por $x^2/a^2+y^2/9=1$). Representar gráficamente dicho lugar geométrico.

PROBLEMA 116 (060515)

Resolver la ecuación $z^3-(8+i).z^2+(24+4i).z-(24-6i)=0$, sabiendo que el afijo de una de las raíces está en la bisectriz del primer cuadrante.

PROBLEMA 117 (030615)

Hallar las dos dimensiones de un rectángulo sabiendo que se expresan en decímetros por dos números enteros, y en metros por dos números decimales no enteros. Se sabe también que el perímetro se expresa en metros y la superficie en metros cuadrados por el mismo número decimal.

PROBLEMA 118 (010715)

a) Hallar un vector normal a la superficie $z=+\sqrt{x^2+y^2}+\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$ en un punto genérico $(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

b) Hallar el coseno del ángulo θ formado por el vector normal anterior y el eje z, y determinar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\theta$.

PROBLEMA 119 (290715)
a) ¿Qué es una diferencial exacta?.
b) ¿Es diferencial exacta la ecuación *P(x,y).dx+Q(x,y).dy,* si son *P(x,y)=3y+10x* y *Q(x,y)=3x+2y*?.
Si es así, integrarla.

PROBLEMA 120 (260815)
En una reunión hay varias personas. Se incorpora Alicia y la media de la edad aumenta en 4 años. Posteriormente se incorpora Beatriz, que es gemela de Alicia, y la media de edad vuelve a aumentar, pero en este caso solo en 3 años. ¿Cuántas personas había en la reunión antes de entrar Alicia?

PROBLEMA 121 (230915)
En una batalla en la que participan entre 10.000 y 11.000 soldados, han resultado muertos 23/165 del total. Y han resultado heridos 35/143 del total. ¿Cuántos soldados resultaron ilesos en esta batalla?.

PROBLEMA 122 (211015)
Demostrar que la integral general de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \log x.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

puede expresarse por

$$y(x) = \int \frac{dx}{x\left(1 - \log x\right) + C}$$

PROBLEMA 123 (181115)
Sea el conjunto $X = \{a,b,c,d,e\}$ y una topología T_X definida en X por

$$T_X = \{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$$

Dado el subconjunto $A = \{a,b,c\}$ de X, se pide:

a) Encontrar los puntos interiores de A.
b) Encontrar los puntos exteriores de A.
c) Encontrar los puntos fronteras de A.

PROBLEMA 124 (161215)
Probar que $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}$ no pueden ser términos de una misma progresión aritmética.

Año 2016

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2016.pdf)

PROBLEMA 125 (130116)

Clasificar la cónica

$$f \equiv x^2 + 2xy + y^2 + x - 2y + 1 = 0$$

y hallar su ecuación reducida.

PROBLEMA 126 (100216)

Demostrar que $\forall p \in Q$ se verifica el isomorfismo

$$Q[x] \big/ _{x-p} \approx Q$$

siendo Q el cuerpo de los números racionales y *Q[x]* el anillo de los polinomios en una indeterminada sobre Q.

PROBLEMA 127 (090316)

Usando variable compleja y el método de los residuos, obtenga el valor de la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b.sen\theta}$$

sabiendo que

$$\begin{cases} a^2 > b^2 > 0 \\ a.b > 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 128 (060416)

Probar que son convergentes las series

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots = \sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots = \sum_1^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Y que sus sumas respectivas son $1/2$ y 2.

PROBLEMA 129 (040516)

Sea $X = \{a,b,c,d,e\}$. Determinar si cada una de las siguientes clases de subconjuntos de X es una topología de X o no lo es.

$$\Gamma_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$$

$$\Gamma_2 = \{X, \phi, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

$$\Gamma_3 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

PROBLEMA 130 (010616)
Calcular

$$\iiint_{(V)} z.dx.dy.dz$$

donde (V) es el volumen limitado por el plano z=0 y la mitad superior del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

PROBLEMA 131 (290616)
Encontrar, caso de existir, el valor del parámetro *a* tal que los cuatro puntos siguientes son coplanarios.

A(1,0,-2), B(0,a,3), C(1,-1,1), D(1,1,1)

Determinar, usando el valor de *a*, la ecuación general de un plano que contiene a los puntos *A, B* y *C.*

PROBLEMA 132 (270716)
Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-senx}}dx$$

PROBLEMA 133 (240816)
En el cuerpo *Q* de los números racionales se define la relación binaria *R* por:

$$xRy \leftrightarrow \exists n \in Z / x = \frac{3y+n}{3}$$

(Z es el anillo de los números enteros)

a) Probar que *R* es de equivalencia.
b) Determinar el conjunto cociente.
c) Razonar si los elementos 2/3 y 4/5 pertenecen a una misma clase.

PROBLEMA 134 (210916)
Hallar la ecuación diferencial de la familia de superficies

$$\Phi\left(\frac{x+y}{xy},\frac{z}{xy}\right)=0$$

PROBLEMA 135 (191016)
Hallar un número de cinco cifras diferentes que sea igual a la suma de todos los de tres cifras que se puedan obtener formando todas las variaciones ordinarias de dichas cifras tomadas de tres en tres.

PROBLEMA 136 (161116)
Dada la función

$$f=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

demuéstrese que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

PROBLEMA 137 (141216)
Hallar el número $N=2^x.5^y$, sabiendo que la suma de sus divisores es 961.

Año 2017

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2017.pdf)

PROBLEMA 138 (110117)

La gráfica de $y^2+2xy+40|x|=400$ divide al plano en varias regiones una de las cuales está acotada. Calcula el área de esa región.

PROBLEMA 139 (080217)

Calcúlese por medio de una integral definida

$$A=\lim a_n$$

siendo (a_n) la sucesión cuyo término general es

$$a_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\left(1+\frac{6}{n}\right)...\left(1+\frac{2n}{n}\right)}$$

PROBLEMA 140 (080317)

Estudiar la continuidad de

a) $f_1(x)=+\sqrt{x^2-3x+2},\ \forall x\in R$

b) $f_2(x)=L(\cos x),\ en\left[0,2\right]$

c) $f_3(x)=\sqrt{\pi^2-x^2}.tgx,\ \forall x\in R$

PROBLEMA 141 (050417)

Se desea obtener el punto de la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{x^2}{4}-2x$$

en el que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación

$$3x-2y+1=0$$

PROBLEMA 142 (030517)

Sea *(G,+)* un grupo aditivo abeliano. Se pide:

a) Probar que para dos elementos, *x* e *y*, cualesquiera de *G*, se verifica que el opuesto de *x+y* es – *x* - *y*.
b) Demostrar que si *H* es subgrupo de *G*, entonces *G/H* es grupo abeliano.
c) Sea *n* un número entero. Probar que para dos elementos, *x* e *y*, cualesquiera de G se verifica que *n.(x+y)=n.x+n.y*.

PROBLEMA 143 (310517)
Mediante el Algoritmo de Euclides, obténgase el Máximo Común Divisor de los números **25905** y **12405**. Obténgase también el Mínimo Común Múltiplo.

PROBLEMA 144 (280617)
Hallar la ecuación de una hipérbola, referida a un sistema ortonormal contenido en los ejes coordenados, en cada uno de los siguientes casos:

a) Su excentricidad es 5/4 y su distancia focal es 5.
b) Su excentricidad es $\sqrt{13}/3$ y el punto $P(5,8/3)$ pertenece a la hipérbola.
c) Los puntos $P(25/4,3)$ y $Q(5,0)$ pertenecen a la hipérbola.

PROBLEMA 145 (260717)
Para la variable aleatoria ξ de contradominio $[\xi \geq x_0]$ y función de densidad de probabilidad dada por

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_0} e^{-\frac{x}{x_0}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Determinar:

a) La función de distribución.
b) Determinar $p[x \geq x_0],\ \forall x$.
c) Representación gráfica.

PROBLEMA 146 (230817)
En una interpolación polinominal, encontrar el polinomio de interpolación para la función $f(x)$ sabiendo que

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 3 \\ f(2) = -2 \end{cases}$$

PROBLEMA 147 (200917)
Para todos los $\alpha, \beta \in G = \{\alpha / \alpha : Z \to Z\}$ sea $\alpha \times \beta$ la aplicación definida por $(\alpha \times \beta)(x) = \alpha(x).\beta(x)$ donde $x \in Z$ y . es la multiplicación usual de los enteros. ¿Es $(G,\times)$ un grupoide?. ¿Posee elemento neutro?. ¿Qué elementos poseen inverso?.

PROBLEMA 148 (181017)
a) Determinar la ecuación de la envolvente a la familia de circunferencias que pasan por el orígen y tienen su centro en la parábola $y = x^2$

b) Determinar la ecuación de la envolvente de un segmento móvil de longitud *c* constante dada, cuyos extremos se apoyan en los ejes cartesianos.

PROBLEMA 149 (151117)
Sea *f* una aplicación continua de *[0,1]* en sí mismo. Demostrar que *f* tiene al menos un punto fijo.

PROBLEMA 150 (121217)
Sea Γ la topología de R constituida por R, ϕ y todos los intervalos infinitos $E_x = (x, \infty)$ donde $x \in R$.

a) Determinar los conjuntos cerrados de (R, Γ).
b) Determinar la clausura de los conjuntos $[3,7), \{7,24,47,85\}, \{3,6,9,12,...\}$.

Año 2018

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2018.pdf)

PROBLEMA 151 (100118)

Resuélvase la integral triple

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

PROBLEMA 152 (070218)

a) Demostrar que la propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria, es decir, que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es también espacio de Hausdorff.

b) Sea T_R la topología de la recta real R generada por los intervalos abiertos-cerrados $(a,b]$. Demostrar que (R,T_R) es un espacio de Hausdorff.

PROBLEMA 153 (070318)

Prueba que la gráfica del polinomio P(x) es simétrica respecto del punto $A(a,b)$ sí y sólo sí existe un polinomio Q tal que: $p(x) = b + (x-a)Q((x-a)^2)$ para todo $x \in R$

(Olimpiada Matemática Española, 2001. Murcia. Primera sesión)

PROBLEMA 154 (030418)

a) Obténgase la fórmula vectorial de una simetría especular en el espacio E_3.

b) Hállese el punto especularmente simétrico del punto (3,1,0) respecto al plano $4x - 4y + 2z - 1 = 0$.

PROBLEMA 155 (020518)

Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones

$$f: Z \to Z$$

tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Olimpiada Matemática Española. Fase Nacional 2004 (Ciudad Real). Primera sesión

PROBLEMA 156 (300518)

Determinar la tangente, normal principal y binormal a la curva

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = 1 - t \\ z = t^2 \end{cases}$$

en el punto (1,0,1)

PROBLEMA 157 (270618)

Sea x un elemento nilpotente de un anillo A ($x^n=0$ para algún número natural n). Probar que $1+x$ es una unidad de A (un elemento inversible en A). Deducir que la suma de un elemento nilpotente y una unidad es también una unidad en A.

PROBLEMA 158 (250718)
Sean las ecuaciones paramétricas de dos curvas alabeadas:

$$a)\begin{cases} x = x_0 + \lambda t \\ y = y_0 + \mu t \\ z = z_0 + \vartheta t \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x = a.\cos u \\ y = a.sen u \\ z = k.u \end{cases}$$

1) Hállese la ecuación continua de cada curva.
2) ¿Qué tipo de curva es en cada caso?

PROBLEMA 159 (220818)
Sean 5 segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo. Demuestre que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

PROBLEMA 160 (190918)
Hállese la expresión del versor tangente a la curva definida por las ecuaciones:

$$x = \frac{u^4}{4}, \quad y = \frac{\sqrt{2}u^3}{3}, \quad z = \frac{u^2}{2}$$

en un punto cualquiera de la misma.

PROBLEMA 161 (171018)
Demostrar que

$$H(n) = 3^{2n+3} + f(n) - 27 \text{ es divisible por } 60, \forall n \in N$$

siendo

$$f(n) = \begin{cases} 60k, & con\ k \in N, si\ n\ es\ par \\ 60k + 24, & con\ k \in N, si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

PROBLEMA 162 (141118)
Dados los tres puntos

$$P(3,0,-1),\ Q(5,-1,0),\ R(0,0,0)$$

se pide determinar el ángulo z que forman los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

PROBLEMA 163 (121218)

Calcular el centro, ejes y vértice de la cónica

$$x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 - 4 = 0$$

Año 2019

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2019.pdf)

PROBLEMA 164 (090119)

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -5<x<0 \\ 3 & 0<x<5 \end{cases} \quad (period=10)$$

1) Hallar los coeficientes de Fourier.
2) Escribir la correspondiente serie de Fourier.
3) ¿Cómo habría que definir f(x) en los puntos x=-5, x=0 y x=5 para que la serie de Fourier converja hacia f(x) en $-5 \le x \le 5$?

PROBLEMA 165 (060219)

1) Deducir la expresión cartesiana del plano tangente a la superficie F(x,y,z)=0 en el punto (x_0,y_0,z_0) de la misma.
2) Deducir la expresión cartesiana de la recta normal a la superficie en dicho punto (x_0,y_0,z_0).
3) Encontrar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$ en el punto (1,2,-1).

PROBLEMA 166 (060319)

Se considera el subconjunto P de R^n formado por todas las n-plas de números reales tales que los elementos de cada n-pla formen una progresión aritmética. Probar que P es un subespacio vectorial de R^n y determinar una base del mismo. Calcular, respecto a la base hallada, las coordenadas del vector (6,9,12,…,3n+3,…).

PROBLEMA 167 (030419)

a) Expóngase la manera de resolver una ecuación diferencial lineal de 2º orden con coeficientes constantes y homogénea $py''+qy'+ry=0$.
b) Resolver $y''+2y'-3y=0$.
c) Resolver $y''+y=0$.

PROBLEMA 168 (010519)

Resolver las siguientes ecuaciones diofánticas:

a) $z^2-y^2=17$
b) $z^2-y^2=72$
c) $z^2-y^2=6$

PROBLEMA 169 (290519)

a) Explíquese el concepto de ecuación diferencial de primer orden con variables separables, así como la manera de integrarla.
b) Si la ecuación

$$y'=-\frac{(x-1)^2.y^{-1}}{e^{-y^2}}$$

es de tal tipo, intégrese.

PROBLEMA 170 (260619)

a) Hallar las soluciones de la ecuación $e^z = 1$.

b) Probar que $\arg e^z = \mathrm{Im}(z) + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

c) Si ϕ es un número real cualquiera, encontrar todos los números reales θ tales que $e^{i\theta} = e^{i\phi}$.

PROBLEMA 171 (240719)

Dada una parábola de ecuación $y^2 = 2x$, la tangente en un punto *P* corta al eje de ordenadas en *A*, y la normal, también en *P*, corta a dicho eje en un punto *B*. Determinar la ecuación del lugar geométrico que describe el baricentro del triángulo *PAB* cuando el punto *B* describe la parábola.

PROBLEMA 172 (210819)

Se supone que la función f de [a,b] en R es 1-escalonada y que

$$f(a+b-x) = f(x)$$

Probar que

$$\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

PROBLEMA 173 (180919)

El centro C(A) de un anillo A es el subconjunto de A formado por los elementos que conmutan multiplicativamente con los elementos del anillo:

$$C(A) = \left\{ x \in A \,/\, x.a = a.x, \forall a \in A \right\}$$

Demostrar que si se verifica que $\forall y \in A, y^2 - y \in C(A)$, entonces A es un anillo conmutativo.

PROBLEMA 174 (161019)

Dada la función de densidad bidimensional

$$f(x,y) = \begin{cases} 6.e^{-2x-3y} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & x < 0, y > o \end{cases}$$

Determinar la función de distribución y las funciones de densidad marginales.

PROBLEMA 175 (131119)

Se consideran dos tiradores, X e Y. Se sabe que la probabilidad de X de dar en el blanco es ¼, y la probabilidad de que Y de en el blanco es 1/3.

1) Si cada uno dispara dos veces ¿cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado una vez por lo menos?
2) Si cada uno dispara una vez y el blanco es alcanzado solamente una vez, ¿Cuál es la probabilidad de que X haya dado en el blanco?
3) Si X puede disparar solamente dos veces, ¿cuántas veces debe disparar Y para que haya por lo menos un 90% de probabilidad de que el blanco sea alcanzado?

PROBLEMA 176 (111219)

Integrar la ecuación diferencial

$$y'^3-(xy+x^2+y^2)\,y'^2+(xy^3+yx^3+x^2y^2)\,y'-x^3y^3=0$$

Año 2020

(para ver soluciones, http://casanchi.com/PROBLEMAS/problemas2020.pdf)

PROBLEMA 177 (080120)

Deducir la fórmula que permite obtener las soluciones de la ecuación cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

(Fórmula de Cardano)

PROBLEMA 178 (050220)

Exprese la manera de determinar la tangente y la normal a una curva plana en un punto (x_0,y_0), cuando la curva viene dada en cualquiera las formas implícita, paramétrica o explícita.

Aplicar el procedimiento que se describa al caso de la curva C siguiente que viene descrita en las formas:

a) implíci.: $y-x^2+2x-1=0$, b) paramét.: $\{x=u+1, \ y=u^2\}$, c) explíci.: $Y=x^2-2x+1$

PROBLEMA 179 (040320)

Integrar la ecuación diferenclia

$$y' = (x+y)^2$$

PROBLEMA 180 (010420)

Desde dos puntos del Ecuador terrestre cuyas longitudes difieren en 90º parten simultáneamente hacia el polo norte dos móviles, A y B, siguiendo sus meridianos respectivos, con velocidades 2000/3 kms/h y 1000 kms/h, respectivamente. Calcúlese:

1) La distancia que separa a estos dos móviles a las 5 horas, medida sobre el arco de círculo máximo que los une.
2) Los ángulos que este círculo máximo forma con los meridianos de A y B.
3) Área de los husos definidos por los ángulos A y B.

Nota: Suponer, por simplicidad, que la longitud del círculo máximo sobre la superficie terrestre es de 40.000 kms, esto es, que la longitud del radio terrestre es de 6.366'1977 kms

PROBLEMA 181 (290420)

Dedúzcase, para una curva plana, la curvatura, el radio de curvatura, el centro de curvatura y la ecuación de la evoluta.

PROBLEMA 182 (270520)

Determinar la convergencia de las series de números reales

1) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{2.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots$

2) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^n} + \ldots$

empleando el criterio que se considere adecuado.

PROBLEMA 183 (240620)

Sea $f: X \to Y$ una función de un conjunto no vacío X en un espacio topológico (Y,μ). Si es Γ la clase de las imágenes recíprocas de los abiertos de Y :

$$\Gamma = \left\{ f^{-1}(g) / g \in \mu \right\}$$

se pide demostrar que Γ es una topología en X .

PROBLEMA 184 (220720)

Establecer la manera de obtener la diferencial segunda de una aplicación de R^n en R^m (R: cuerpo de los números reales)

$$\vec{f}: R^n \to R^m$$

determinando las correspondientes matrices (matrices hessianas).
Aplicar el procedimiento a las aplicaciones:

a) $\vec{f}: R^2 \to R,\ \ \forall (x,y) \in R^2, f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 2y^3 \in R$

b) $\vec{f}: R^2 \to R^2,\ \ \forall (x,y) \in R^2, f(x,y) = (x^2 - xy, 3xy + y^2) \in R^2$

PROBLEMA 185 (190820)

Sea m un entero positivo fijo cualquiera y sea S={0,1,2,…,m-1}. Se define en S una operación binaria, $\circ$, de la siguiente manera:

$$\forall a,b \in S, a \circ b = \begin{cases} a+b, \ si\ a+b < m \\ r, \ si\ a+b = m+r \quad\quad 0 \le r < m \end{cases}$$

Demostrar que (S,$\circ$) es un grupo de orden m.

PROBLEMA 186 (160920)

Dada la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- ¿Cuál es la matriz inversa de A para x=0?
- ¿Para qué valor o valores de x la matriz A no es inversible?

PROBLEMA 187 (141020)

a) Considérese la siguiente topología de **X={a,b,c,d,e}:**

W={X, Φ, {a}, {a,b}, {a,c,d}, {a,b,c,d}, {a,b,e}}

escribir los entornos del punto **e** y del punto **c**.

b) Determinar si los conjuntos siguientes son entornos del punto **0** en el espacio topológico **(R,Ta)**, donde **Ta** es la topología usual:

(-1/2,1/2], (-1,0], [0,1/2) y (0,1]

PROBLEMA 188 (111120)

Sea E un espacio vectorial sobre R, de dimensión 3, y sea B={u1,u2,u3} una base de E. Si f es un endomorfismo de E que está representado en la base B por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1- Hallar las ecuaciones paramétricas del núcleo de f y una base del mismo.

2- Hallar la relación que deben cumplir X, Y, Z, para que el vector Xu1+Yu2+Zu3 pertenezca a f(E).

PROBLEMA 189 (091220)

Hallar la curvatura de las curvas planas siguientes en los puntos que se indican

a) $y = x^4 - 4x^3 + 18x^2 \;\text{ en }\; (0,0)$

b) $x^2 + xy + y^2 = 3 \;\text{ en }\; (1,1)$