RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 210 (200722)
Si a, b, c son números reales positivos, demostrar la desigualdad

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 3(b-c)(a-b)$$

¿Cuándo se verifica la desigualdad?.
RESOLUCIÓN:

Desarrollamos el segundo miembro de la desigualdad. Simplificando y ordenando:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 3(b-c)(a-b) \rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 3ba-3b^2-3ca+3cb$$

$$a^2+c^2+2ca+4b^2-4ab-4bc \geq 0$$

O sea: $(a+c)^2+4b^2-4b(a+c) \geq 0$

es decir: $((a+c)-2b)^2 \geq 0$

Para que se verifique la igualdad ha de ser $((a+c)-2b)^2 = 0$

Esto es, $(a+c)-2b = 0$

En definitiva, la igualdad se verifica si $b = \dfrac{a+c}{2}$

PROBLEMA 209 (220622)

El producto de los tres números complejos z_1, z_2 y z_3 es:

$$4+4.\sqrt{3}.i$$

Encontrar tales números sabiendo que sus módulos están en progresión geométrica de razón 2 y sus argumentos están en progresión aritmética de diferencia 120º.

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, se tiene, en notación polar:

$$z_1=(r,a),\; z_1=\left(2r,a+\frac{2\pi}{3}\right),\; z_1=\left(4r,a+\frac{4\pi}{3}\right)$$

y también, con notación binómica:

$$z_1.z_2.z_3=4+4.\sqrt{3}.i$$

por tanto, llamando R al módulo del producto, y A a su argumento:

$$z_1.z_2.z_3=\left(8.r^3,3a+\frac{6\pi}{3}\right)=\left(8.r^3,3a+2\pi\right)=\left(8.r^3,3a\right)=(R,A)$$

de donde:

$$r=\sqrt[3]{R/8},\; a=A/3$$

y siendo $R=\sqrt{4^2+4^2.3}=\sqrt{4^3}=8$, y $A=arctg\,\frac{4\sqrt{3}}{4}=arctg\sqrt{3}=\pi/3$

será, finalmente,

$$r=\sqrt[3]{R/8}=\sqrt[3]{1}=1,\;\; a=A/3=\pi/9$$

con lo que los tres números complejos buscados son:

$$z_1=\left(1,\frac{\pi}{9}\right),\; z_1=\left(2,\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right),\; z_1=\left(4r,\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

o bien:

$$z_1=\left(1,\frac{\pi}{9}\right),\; z_1=\left(2,\frac{7\pi}{9}\right),\; z_1=\left(4,\frac{13\pi}{9}\right)$$

PROBLEMA 208 (250522)

Dado el número complejo

$$z = a + b.i$$

Deteminar, si existen, dos números complejos, w y w', tales que z = w + w', y tanto la diferencia de ambos como su cociente sean números complejos imaginarios puros.

(z = w + w', re[w - w'] = 0, re[w/w'] = 0)

RESOLUCIÓN:

Llamemos w = c + d.i, w' = e + f.i
De ser z = w + w', se tiene que

$$a + b.i = (c + d.i) + (e + f.i) = c + e + (d + f).i \rightarrow \begin{cases} a = c + e \\ b = d + f \end{cases}$$

también:

$$\operatorname{Re}\left[w - w'\right] = 0 \rightarrow \operatorname{Re}\left[(c - e) + (d - f).i\right] = 0 \rightarrow c - e = 0 \rightarrow c = e$$

$$\operatorname{Re}\left[w/w'\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{c + di}{e + fi}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{ce + df}{e^2 + f^2} + \frac{ed - cf}{e^2 + f^2} i\right] = 0 \rightarrow ce + df = 0$$

por tanto:

$$\begin{cases} c + e = a \wedge c = e \rightarrow 2c = 2e = a \rightarrow c = e = a/2 \\ ce + df = 0 \rightarrow (a/2).(a/2) + df = 0 \rightarrow a^2/4 + df = 0 \end{cases}$$

en definitiva:

$$a^2/4 + df = 0 \wedge b = d + f \rightarrow a^2/4 + d(b - d) = 0 \rightarrow a^2/4 + db - d^2 = 0$$

ordenando la ecuación de 2º en d:

$$4d^2 - 4bd - a^2 = 0$$

que, al resolver:

$$d = \frac{b \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

por tanto, las soluciones son $d_1 = \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, $d_2 = \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

y los valores correspondientes de f:

$$f_1 = b - d_1 = b - \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad f_2 = b - d_2 = b - \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

por tanto, finalmente:

$$w = c + d.i \rightarrow \begin{cases} w_1 = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} i \\ w_2 = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} i \end{cases}$$

$$w' = e + f.i \rightarrow \begin{cases} w_1' = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} i \\ w_2' = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} i \end{cases}$$

comprobación:

$$w_1 + w'_1 = \frac{a}{2} + \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} i + \frac{a}{2} + \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} i = a + bi = z$$

$$w_2 + w'_2 = \frac{a}{2} + \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} i + \frac{a}{2} + \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} i = a + bi = z$$

PROBLEMA 207 (270422)
Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \text{ y } R=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

Calcular la matriz $S=A+AR+AR^2+...+AR^{n-1}$

RESOLUCIÓN:

$$S=A(I+R+R^2+...+R^{n-1})$$

Calculemos la potencia n-sima de *R* por inducción sobre *n*:

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}, A^2=\begin{bmatrix}2^2 & 0\\ 0 & 3^2\end{bmatrix},..., A^n=\begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{bmatrix}$$

Para ver que es correcto comprobamos que para k-1:

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2^{k-1} & 0\\ 0 & 3^{k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^k & 0\\ 0 & 3^k\end{bmatrix}$$

La suma del paréntesis es la de una progresión geométrica de razón *R* y primer elemento la matriz identidad *I*. Asimismo ambos elementos no nulos de la suma, 2^n y 3^n, están también en progresión geométrica de razones respectivas 2 y 3:

$$1+2+2^2+2^3+...+2^{n-1}=\frac{2^{n-1}.2-1}{2-1}=\frac{2^n-1}{1}=2^n-1$$

$$1+3+3^2+3^3+...+3^{n-1}=\frac{3^{n-1}.3-1}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}=\frac{3^n-1}{2}$$

por tanto:

$$I+R+R^2+...+R^{n-1}=\begin{bmatrix}2^n-1 & 0\\ 0 & \dfrac{3^n-1}{2}\end{bmatrix}$$

y finalmente:

$$S=A.(I+R+R^2+...+R^{n-1})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2^n-1 & 0\\ 0 & \dfrac{3^n-1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n-1 & 0\\ 0 & 3^n-1\end{bmatrix}$$

PROBLEMA 206 (300322)

El problema de Jules Verne. La vuelta al mundo en 80 días

En la novela de Verne se presenta un problema matemático cuando el protagonista, Phileas Foog, realiza el viaje alrededor del globo terrestre marchando desde Londres hacia el Este, esto es, de Oeste a Este, en contraposición con el sentido del movimiento aparente del sol, que es de Este a Oeste. Resulta que descubre que completa una vuelta alrededor del mundo midiendo 80 días de viaje cuando en Londres habían transcurrido solo 79. Se pide:

1. Justificar esta situación.
2. ¿Qué ocurriría si el viajero se desplaza de Este a Oeste?,

RESOLUCIÓN:

Veamos. Sabemos que:

1 día = 24 horas = 60.24 =1440 minutos de tiempo.
81 días = 81.24 = 1944 horas = 1944.60 =116640 minutos de tiempo
80 días = 80.24 = 1920 horas = 1920.60 =115200 minutos de tiempo
79 días = 79.24 = 1896 horas = 113760 minutos de tiempo
1 vuelta al planeta = 360º = 360.60 = 21600 minutos de arco

El movimiento aparente del Sol (Siempre en sentido Este a Oeste):

Puesto que da una vuelta completa al planeta en un día, es decir, recorre 360º en 24 horas, su velocidad puede calcularse en grados por hora:

$$V_{sol} = 360º/24 = 15º/hora$$

Movimiento de un viajero:

Puesto que da una vuelta completa al planeta en 80 días, es decir, recorre 360º en 80 días, su velocidad puede calcularse en grados por día, y obviamente también en grados por hora:

$$V_{viajr} = 360/80 \text{ grados/día} = 4'5º/\text{día} = (4'5/24)º/\text{hora}$$

Tiempo que tarda el Sol en recorrer los 4,5º que recorre el viajero en 24 horas, en sentido Este a Oeste. Mediante una simple regla de tres:

$$V = 4'5/15 = 0'3 \text{ horas}$$

El "día" que mide el viajero que se desplaza hacia el Este:

Puesto que en este caso el sentido del movimiento es contrario al sentido del movimiento aparente del Sol, el "día" que mide el viajero se acorta por el movimiento del sol en 0'3 horas: "dia" = 24 - 0'3 = 23'7 horas

Los 80 "días" que mide el viajero = 80.23'7=1896 horas = 79 días reales.

Esto es, cuando en el punto de partida (Londres, en el relato de Verne) han transcurrido solo 79 días reales, el viajero considera que ya han transcurrido los 80 días de la apuesta, si no tiene en cuenta que el movimiento aparente del Sol acorta los días que mide en 0'3 horas.

El "día" que mide el viajero que se desplaza hacia el Oeste:
Puesto que en este caso el sentido del movimiento es igual al sentido del movimiento aparente del Sol, el "día" que mide el viajero se alarga por el movimiento del sol en 0'3 horas: "dia" = 24 + 0'3 = 24'3 horas

Los 80 "días" que mide el viajero = 80.24'3=1944 horas = 81 días reales.

Esto es, cuando en el punto de partida han transcurrido 81 días reales, el viajero considera que solo han transcurrido los 80 días de la apuesta, si no tiene en cuenta que el movimiento aparente del Sol alarga los días que mide en 0'3 horas.

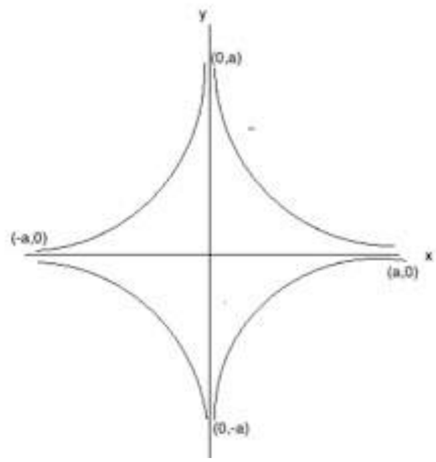
PROBLEMA 205 (020322)

Siendo a un número real positivo, determinar la longitud de la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

RESOLUCIÓN:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1\to x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\to\begin{cases} x=0\to y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\to y=\pm a \\ y=0\to x^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\to x=\pm a\end{cases}$$



Por simetría, la longitud de la curva en cada uno de los cuatro cuadrantes es la misma, por lo que la longitud total de la curva podemos obtenerla multiplicando por cuatro la longitud de la curva en uno cualquiera de los cuadrantes.

Haciendo $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\cos t$, $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=sent$, será: $\cos^2 t+sen^2 t=1$, $\begin{cases} x=a.\cos^3 t \\ y=a.sen^3 t\end{cases}$

Derivando:

$$\begin{cases} x'=3a\cos^2 t.\left(-sent\right) \\ y'=3a.sen^2 t.\cos t\end{cases}$$

Longitud de la curva en el primer cuadrante:

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{x'^2+y'^2}.dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t.sen^2 t+9a^2 sen^4 t.\cos^2 t}.dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}3asent.\cos t\sqrt{\cos^2 t+sen^2 t}.dt=3a\int_0^{\pi/2}sent.\cos t.dt=3a\int_0^{\pi/2}sent.d\left(sent\right).dt=$$

$$=3a.\frac{1}{2}sen^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a\left(1-0\right)=\frac{3}{2}a$$

Y la longitud total de la curva:

$$4L = 4.\frac{3}{2}a = 6a$$

PROBLEMA 204 (020222)

Demostrar que:

$$\binom{m}{n}=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-2}{n-1}+\binom{m-3}{n-1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n-1}{n-1}$$

RESOLUCIÓN:

Utilizando de manera repetida la propiedad básica de los números combinatorios:

$$\binom{m}{n}=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n}$$

se tiene:

$$\binom{m}{n}=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n}=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-2}{n-1}+\binom{m-2}{n}=$$

$$=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-2}{n-1}+\binom{m-3}{n-1}+\binom{m-3}{n}+\ldots=$$

$$=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-2}{n-1}+\binom{m-3}{n-1}+\binom{m-3}{n}+\ldots\ldots+\binom{n+1}{n-1}+\binom{n+1}{n}$$

y si tenemos en cuenta que el último sumando es:

$$\binom{n+1}{n}=\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\binom{n}{n-1}+\binom{n-1}{n-1}$$

tenemos completa la demostración.

PROBLEMA 203 (050122)
Sabiendo que la suma de dos de las raíces de la ecuación

$$x^3 - 503x^2 + (a+4)x - a=0$$

es igual a 4, determinar el valor de a.

RESOLUCIÓN:
Consideremos el polinomio

$$p(x) = x^3 - 503x^2 + (a+4)x - a$$

Si las raíces son A, B y C, se tiene que

$$p(x) = (x-A)(x-B)(x-C) = x^3 - (A+B+C)x^2 + (AB+AC+BC)x - ABC$$

Al identificar:

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B+C = 503 \\ AB+AC+BC = a+4 \\ ABC = a \end{array} \right. \qquad (1)$$

Además, por hipótesis, dos de las raíces, supongamos A y C, suman 4, por lo que:

$$C = 4 - A$$

Sustituyendo esta última igualdad en el sistema (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 499 \\ 4(A+B) - A^2 = a+4 \\ 4 - A = A \end{array} \right. \qquad (2)$$

Esto es:

A = 2, B = 499, C = 2

Finalmente, de la 2ª ecuación del sistema (2):

$$4(2+499) - 2^2 = a+4 \rightarrow 2004 - 4 = a+4 \rightarrow a = 1996$$

Valor que también podemos obtener de la 3ª igualdad del sistema (1):

$$2.2.499 = a = 1996$$