

# RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

## RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

### PROBLEMA 198 (180821)

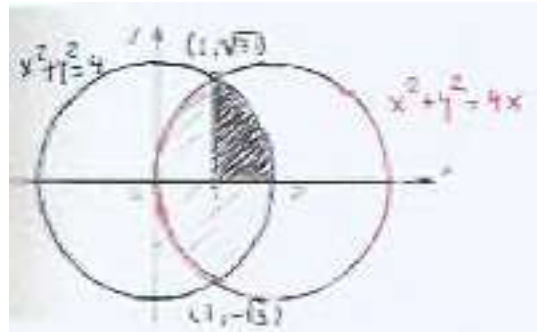
Hallar el área común a los círculos:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 4x$$

### RESOLUCIÓN:

Los puntos de intersección de las circunferencias que definen ambos círculos se obtienen de inmediato:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases} \rightarrow x = 1, y = \pm\sqrt{3}, \text{ por tanto son } (1, +\sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$$



El área limitada por ambas circunferencias es cuatro veces el área rayada en la figura:

$$A = 4 \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

Resolvemos haciendo en principio el cambio de variables  $x = 2 \operatorname{sen} t$ :

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 t} \cdot 2 \cos t \cdot dt = 16 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t \cdot dt = 16 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t \cdot dt = \\ &= 16 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \cdot dt = 8 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) \cdot dt = 8 \left[ t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \\ &= 8 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi/3 \right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Por tanto:

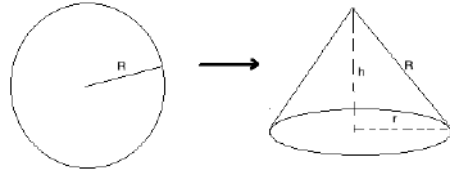
$$A = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \text{ unidades cuadradas}$$

**PROBLEMA 197 (210721)**

Con dos placas circulares de hierro de radio  $R$  se pretende construir una boya formada por dos conos rectos. Calcular las dimensiones de la boya para que su volúmen sea máximo.

**RESOLUCIÓN:**

Con cada una de ambas placas circulares se obtiene un cono de radio  $r$  y generatriz  $R$ .



Por tanto el problema se reduce a determinar el radio  $r$  y la altura  $h$  de un cono de generatriz  $R$  y volúmen máximo.

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ R^2 = r^2 + h^2 \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3, \quad V' = \frac{dV}{dh} = \frac{1}{3} \pi R^2 - \pi h^2 = 0 \rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}} R$$

$$V'' = \frac{d^2V}{dh^2} = -2h\pi < 0 \rightarrow (V \text{ máx})$$

por tanto,  $h = \frac{1}{\sqrt{3}} R$  es la altura del cono de volúmen máximo, y siendo  $r^2 = R^2 - h^2$ ,

es  $r = \sqrt{\frac{2}{3}} R$  el correspondiente radio.

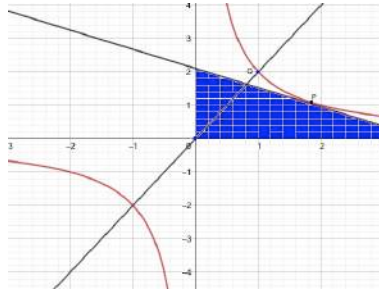
En definitiva, las dimensiones de cada cono de la boya son:

$$\text{radio base} = \sqrt{\frac{2}{3}} R$$

$$\text{altura} = \frac{1}{\sqrt{3}} R$$

**PROBLEMA 196 (230621)**

Probar que con respecto a la hipérbola equilátera, el área del triángulo que define cualquier tangente a la misma con los ejes coordenados es igual al cuadrado del semieje de la hipérbola.

**RESOLUCIÓN:**

Sea la hipérbola equilátera de ecuación  $x \cdot y = a$ . Esto quiere decir que las coordenadas del punto Q de corte con el semieje son  $x = \sqrt{a}$ ,  $y = \sqrt{a}$  :

$$Q(\sqrt{a}, \sqrt{a})$$

por lo que el semieje de la hipérbola, que es la distancia  $d$  desde el origen a Q, viene

$$d = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{a})^2} = \sqrt{2a}.$$

Determinemos ahora la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en un punto cualquiera  $P(x_0, y_0)$  :

$$\text{Pendiente: } y'_0 = -\frac{a}{x_0^2}, \text{ ecuación: } y - y_0 = -\frac{a}{x_0^2}(x - x_0), \text{ o bien: } \frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$$

Corte de la recta tangente con ambos ejes cartesianos:

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow x = 2x_0 \\ x = 0 \rightarrow y = 2y_0 \end{cases}$$

Área del triángulo:

$$A = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{2x_0 \cdot 2y_0}{2} = 2x_0 y_0 = 2a$$

por tanto

$$A = 2a = d^2$$

**PROBLEMA 195 (260521)**

Probar que si

$$3\operatorname{sen}b = \operatorname{sen}(2a + b)$$

entonces se verifica la relación

$$2\operatorname{tga} = \operatorname{tg}(a + b)$$

**RESOLUCIÓN:**

Vamos a tratar de factorizar la igualdad dada mediante las expresiones de factorización clásicas de suma o diferencia de senos, es decir, mediante las fórmulas

$$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \quad \operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B = 2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

Hacemos un cambio de variables. Si llamamos  $A = 2a + b$ ,  $B = b$ , la igualdad dada sería:  $\operatorname{sen}A = 3\operatorname{sen}B$

Sumando a ambos miembros el seno de A y restando dos veces el seno de B:

$$\operatorname{sen}A = 3\operatorname{sen}B \rightarrow 2\operatorname{sen}A - 2\operatorname{sen}B = \operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B \rightarrow 2(\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B) = \operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B$$

Utilizamos ahora las indicadas fórmulas clásicas de factorización:

$$\begin{aligned} 2(\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B) = \operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B &\rightarrow 4\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \rightarrow \\ \rightarrow 4\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} &= 2\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \rightarrow 2\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} \end{aligned}$$

Deshaciendo ahora el cambio de variables:

$$A - B = 2a + b - b = 2a, \quad A + B = 2a + b + b = 2a + 2b$$

Finalmente:

$$2\operatorname{tg}\frac{2a}{2} = \operatorname{tg}\frac{2a+2b}{2} \rightarrow 2\operatorname{tga} = \operatorname{tg}(a+b)$$

**PROBLEMA 194 (280421)**

Sean  $m$  y  $n$  las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Escribir la forma reducida de la ecuación cuyas raíces son  $m^3$  y  $n^3$ , expresando los coeficientes en función de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

**RESOLUCIÓN:**

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n) = 0 \rightarrow \begin{cases} m \cdot n = c/a \\ m + n = -b/a \end{cases}$$

Sea  $x^2 + b'x + c' = 0$  la ecuación cuyas raíces son  $m^3$  y  $n^3$ :

$$\begin{cases} b' = -(m^3 + n^3) \\ c' = m^3 \cdot n^3 \end{cases}$$

se tiene:

$$c' = m^3 \cdot n^3 = (m \cdot n)^3 = \left(\frac{c}{a}\right)^3 = \frac{c^3}{a^3}$$

$$b' = -(m^3 + n^3) = -(m + n)(m^2 - mn + n^2) = \frac{b}{a}(m^2 - mn + n^2)$$

$$\text{pero es } m^2 - mn + n^2 = m^2 + 2mn + n^2 - 3mn = (m + n)^2 - 3m \cdot n = \frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a}$$

$$\text{por tanto } b' = \frac{b}{a} \left( \frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a} \right)$$

y la ecuación buscada es:

$$x^2 + \frac{b}{a} \left( \frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a} \right) x + \frac{c^3}{a^3} = 0$$

**PROBLEMA 193 (310321)**

Demostrar la divergencia de las series:

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots = \sum_1^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\text{b) } (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots = \sum_1^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

**RESOLUCIÓN:**

a) Se tienen los términos de la suma:

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{4}, \dots u_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

y siendo  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  una condición necesaria (aunque no sea suficiente) para que la serie sea convergente, tal serie es divergente.

$$\text{b) } S_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) = \infty \text{ y la serie es divergente}$$

**PROBLEMA 192 (030321)**

Resolver las ecuaciones:

$$a) z^i = 1+i, \quad b) \operatorname{sen} z = 2i$$

siendo:  $z \in \mathbb{C}$  (números complejos), y  $i = \sqrt{-1}$

**RESOLUCIÓN:**

a) tomando logaritmos:  $z^i = 1+i \rightarrow i.Lz = L(1+i)$

donde es  $Lz = L|z| + i \arg z$ , por lo que  $L(1+i) = L|1+i| + i \arg(1+i) =$

$$= L\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = L\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}(1+8k)$$

por tanto:  $i.Lz = L(1+i) \rightarrow Lz = -iL(1+i) = \frac{\pi}{4}(1+8k) - iL\sqrt{2}$

$$z = e^{Lz} = e^{\frac{\pi}{4}(1+8k)} \cdot e^{-iL\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{4}(1+8k)} \cdot (\cos L\sqrt{2} - i \operatorname{sen} L\sqrt{2})$$

Solución: $z = e^{\frac{\pi}{4}(1+8k)} \cdot (\cos L\sqrt{2} - i \operatorname{sen} L\sqrt{2})$
---

$$b) \operatorname{sen} z = 2i \rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2i \rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = -4 \rightarrow e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{2iz} - 1 + 4e^{iz} = 0 \rightarrow (e^{iz})^2 + 4e^{iz} - 1 = 0$$

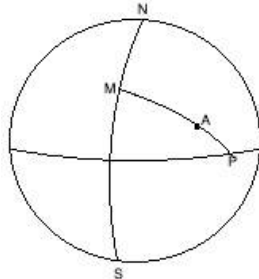
Haciendo el cambio  $x = e^{iz}$  será:  $x^2 + 4x - 1 = 0$ . Resolvemos:

$$x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{5} \rightarrow \begin{cases} e^{iz} = -2 + \sqrt{5} \\ e^{iz} = -2 - \sqrt{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} zi = L(-2 + \sqrt{5}) \\ zi = L(-2 - \sqrt{5}) \end{cases}$$

Soluciones: $z = 2k\pi - L(\sqrt{5} - 2), \quad z = (2k + 1)\pi - iL(\sqrt{5} + 2)$
---

**PROBLEMA 191 (030221)**

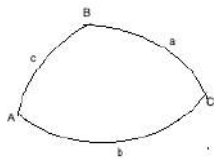
Desde un punto M de la Tierra, cuya latitud es  $45^\circ N$ , y cuya longitud es  $0^\circ$ , parte un avión hacia otro punto P, que está equidistante de los polos de la Tierra y del punto M. Pero se ve obligado a aterrizar en un punto A, a los  $\frac{2}{3}$  de su camino, y al este de M.



- 1) Hállense las coordenadas del punto A de aterrizaje.
- 2) Determinar el tiempo que tarda en llegar al punto A de aterrizaje si en el trayecto lleva una velocidad de 800 kms/hora.

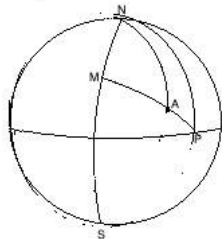
**RESOLUCIÓN:**

Podemos usar la fórmula de los cosenos para un triángulo esférico:



$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen} b \cdot \text{sen} c \cdot \cos A$$

Consideremos los triángulos MNP y MNA. Será:  $MP=90^\circ$ ,  $MA=(\frac{2}{3}) \cdot 90^\circ=60^\circ$ ,  $NP=90^\circ$ ,  $MN=45^\circ$



- 1) Coordenadas del punto A de aterrizaje del avión:

Se tiene:

En el triángulo MNP:

$$\cos NP = \cos MP \cdot \cos MN + \text{sen} MP \cdot \text{sen} MN \cdot \cos M$$

o sea:

$$\cos 90^\circ = \cos 90^\circ \cdot \cos 45^\circ + \text{sen} 90^\circ \cdot \text{sen} 45^\circ \cdot \cos M$$

$$\rightarrow 0 = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos M \rightarrow \cos M = 0 \rightarrow M = 90^\circ$$

En el triángulo MNA:

$$\cos NA = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \text{sen} 60^\circ \cdot \text{sen} 45^\circ \cdot \cos M$$

o sea:

$$\cos NA = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \text{sen} 60^\circ \cdot \text{sen} 45^\circ \cdot \cos M \rightarrow \cos NA = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = 69^\circ 17' 42''$$

con lo que obtenemos la latitud del punto A de aterrizaje:

$$\text{latitud}(A) = 90^\circ - 69^\circ 17' 42'' = 20^\circ 42' 17''$$



Puesto que el avión parte de un punto del meridiano  $0^\circ$ , bastará encontrar la longitud del meridiano que pasa por el punto de aterrizaje del avión, que vendrá dado por el ángulo  $N$  que forma dicho meridiano con el meridiano origen de  $0^\circ$ , por tanto, la longitud del punto A es el ángulo  $N$  en el triángulo MNA:

$$\cos MA = \cos NA \cdot \cos MN + \operatorname{sen} NA \cdot \operatorname{sen} MN \cdot \cos N$$

$$\text{o sea: } 0.5 = \cos(69^\circ 17' 42'') \cdot \cos 45^\circ + \operatorname{sen}(69^\circ 17' 42'') \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos N \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos N = 0.3779616536 \rightarrow N = 67^\circ 47' 32''$$

que es la longitud del punto de aterrizaje:

$$\text{longitud(A)} = 67^\circ 47' 32''$$

$$\text{Coordenadas de A: } 20^\circ 42' 17'' \text{N}, 67^\circ 47' 32'' \text{E}$$

2) Tiempo que tarda en aterrizar:

De la definición de velocidad:  $t = e/v$ , y puesto que el recorrido hasta el punto A es de

$60^\circ$  de círculo máximo:  $e = \frac{60}{360} 2\pi R = 6614,3067 \text{ kms}$ ,  $R$  radio de la Tierra, se tiene:

$$t = \frac{6614,3067}{800} \text{ horas} = 8.267883375 \text{ horas} = 8h, 16m, 4s, 38dec$$

**PROBLEMA 190 (060121)**

Estudiar la convergencia de la siguiente integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$$

**RESOLUCIÓN:**

Dividiendo el intervalo  $[0,1]$ :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx/\sqrt{1-x^2}}{x^{1/2}}$$

Esta integral tiene el numerador acotado en el intervalo  $[0,1/2]$  y el denominador tiene exponente menor que la unidad, por lo que la integral converge.

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}} = \int_{1/2}^1 \frac{dx/\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{1-x}} = \int_{1/2}^1 \frac{dx/\sqrt{x(1+x)}}{(1-x)^{1/2}}$$

Esta integral tiene asimismo acotado el numerador en el intervalo  $[1/2,1]$  y el denominador tiene exponente menor que la unidad, por lo que la integral también converge.

La integral dada  $I$  resulta ser suma de dos integrales convergentes, por lo que también es convergente.