RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

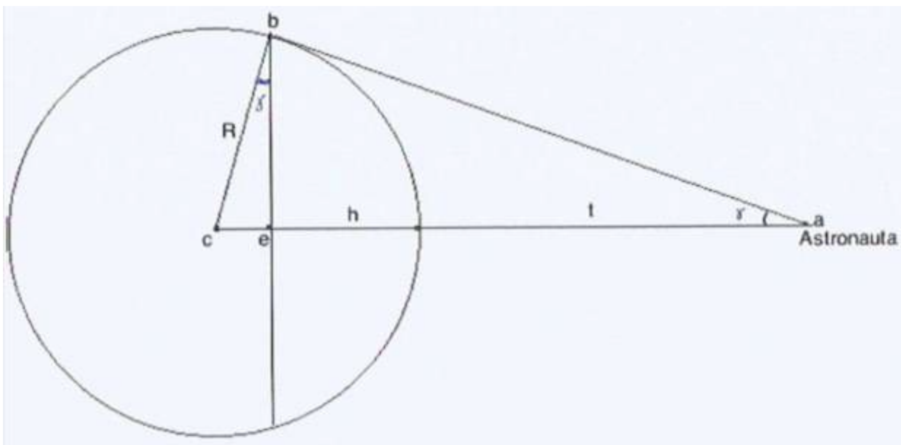
RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 200 (131021)

Un astronauta observa la Tierra y una medición aproximada de la superficie que ve es de 6.10^6 km^2. Calcular con este dato la altura a la que se encuentra.

(Suponer que la Tierra es esférica y que es exacta la definición de metro como parte del cuadrante)

RESOLUCIÓN:



Longitud de la circunferencia terrestre: $2\pi R$. De un cuadrante: $\pi R/2$. Longitud de un metro: $1m = 10^{-7}.\pi R/2$, de donde se obtiene el radio de la Tierra:

$$R = 2.10^7/\pi \text{ ms} = 2.10^4/\pi \text{ kms.}$$

Superficie del casquete esférico observado: $2\pi Rh = 6.10^6$, de donde: $h = \frac{3}{\pi R}10^6$

De la figura:
altura del astronauta: $t = ca - R$.
Los triangulos bce y abc son semejantes, por lo que $ca/cb = cb/ce$, de donde:

$$ca = \frac{cb^2}{ce} = \frac{R^2}{R-h} = \frac{R^2}{R - \frac{3}{\pi R}10^6} = \frac{\pi R^3}{\pi R^2 - 3.10^6}$$

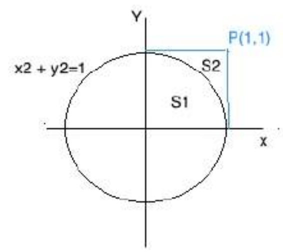
Finalmente:

$$t = ca - R = \frac{\pi R^3}{\pi R^2 - 3.10^6} - R = \frac{3.10^6 R}{\pi R^2 - 3.10^6} = 153{,}61 \text{ kms}$$

PROBLEMA 199 (150921)

Se tiene un cuadrado determinado por los ejes coordenados y el punto P(1,1). La curva $x^2+y^2=1$ divide al cuadrado en dos regiones. Se desea calcular la razón de las áreas de las dos regiones.

RESOLUCIÓN:



- Una de las regiones, s1, tiene por área la cuarta parte del área del círculo de radio 1:

$$s1 = \frac{1}{4}\pi.1^2 = \pi/4$$

- La otra región, s2, tiene por área la diferencia entre el área del cuadrado de lado 1 y el área de s1:

$$s2 = 1 - \pi/4$$

- La razón de ambas áreas es inmediata:

$$s_2/s_1 = \frac{1-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} - 1$$

PROBLEMA 198 (180821)

Hallar el área común a los círculos:

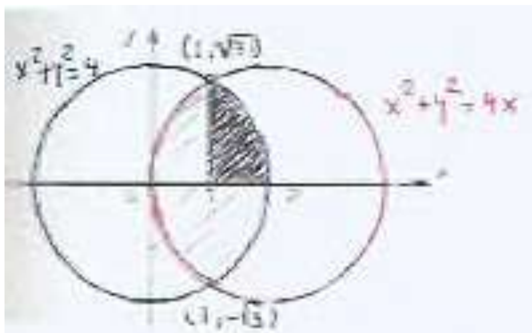
$$x^2+y^2=4 \quad y \quad x^2+y^2=4x$$

.

RESOLUCIÓN:

Los puntos de intersección de las circunferencias que definen ambos círculos se obtienen de inmediato:

$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=4x \end{cases} \rightarrow x=1,\ y=\pm\sqrt{3}$, por tanto son $(1,+\sqrt{3}),(1,-\sqrt{3})$



El área limitada por ambas circunferencias es cuatro veces el área rayada en la figura:

$$A=4\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

Resolvemos haciendo en principio el cambio de variables $x=2sent$:

$$A=4\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{4-4sen^2t}.2\cos t.dt=16\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{1-sen^2t}.\cos t.dt=16\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2 t.dt=$$

$$=16\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}.dt=8\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2t).dt=8\left[t+\frac{1}{2}sen2t\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=$$

$$=8\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}sen\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}sen\,\pi/3\right)=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$$

Por tanto:

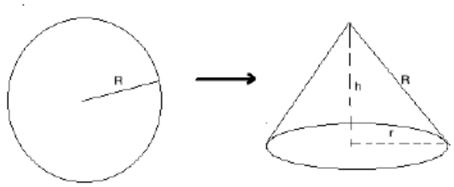
$$A=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}\ unidades\ cuadradas$$

PROBLEMA 197 (210721)

Con dos placas circulares de hierro de radio ***R*** se pretende construir una boya formada por dos conos rectos. Calcular las dimensiones de la boya para que su volúmen sea máximo.

RESOLUCIÓN:

Con cada una de ambas placas circulares se obtiene un cono de radio r y generatriz R.



Por tanto el problema se reduce a determinar el radio r y la altura h de un cono de generatriz R y volúmen máximo.

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \\ R^2 = r^2 + h^2 \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3, \quad V' = \frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi R^2 - \pi h^2 = 0 \rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}}R$$

$$V'' = \frac{d^2V}{dh^2} = -2h\pi < 0 \rightarrow (V\ máx)$$

por tanto, $h = \dfrac{1}{\sqrt{3}}R$ es la altura del cono de volúmen máximo, y siendo $r^2 = R^2 - h^2$, es $r = \sqrt{\dfrac{2}{3}}R$ el correspondiente radio.

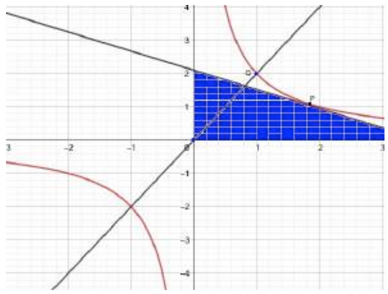
En definitiva, las dimensiones de cada cono de la boya son:

$$radio\ base = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

$$altura = \frac{1}{\sqrt{3}}R$$

PROBLEMA 196 (230621)
Probar que con respecto a la hipérbola equilátera, el área del triángulo que define culquier tangente a la misma con los ejes coordenados es igual al cuadrado del semieje de la hipérbola.

RESOLUCIÓN:



Sea la hipérbola equilátera de ecuación x.y=a. Esto quiere decir que las coordenadas del punto Q de corte con el semieje son $x = \sqrt{a},\ y = \sqrt{a}$:

$$Q(\sqrt{a}, \sqrt{a})$$

por lo que el semieje de la hipérbola, que es la distancia d desde el origen a Q, viene dada por $d = \sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{a}\right)^2} = \sqrt{2a}$.

Determinemos ahora la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en un punto cualquiera $P(x_0, y_o)$:

Pendiente: $y_0' = -\dfrac{a}{x_0^2}$, ecuación: $y - y_0 = -\dfrac{a}{x_0^2}(x - x_0)$, o bien: $\dfrac{x}{2x_0} + \dfrac{y}{2y_0} = 1$

Corte de la recta tangente con ambos ejes cartesianos:

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow x = 2x_0 \\ x = 0 \rightarrow y = 2y_0 \end{cases}$$

Área del triángulo:

$$A = \frac{x.y}{2} = \frac{2x_0.2y_0}{2} = 2x_0y_0 = 2a$$

por tanto

$$A = 2a = d^2$$

PROBLEMA 195 (260521)
Probar que si

$$3senb = sen(2a+b)$$

entonces se verifica la relación

$$2tga = tg(a+b)$$

RESOLUCIÓN:
Vamos a tratar de factorizar la igualdad dada mediante las expresiones de factorización clásicas de suma o diferencia de senos, es decir, mediante las fórmulas

$$senA + senB = 2sen\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}, \quad senA - senB = 2\cos\frac{A+B}{2}sen\frac{A-B}{2}$$

Hacemos un cambio de variables. Si llamamos $A = 2a+b,\ B = b$, la igualdad dada sería: $senA = 3senB$

Sumando a ambos miembros el seno de A y restando dos veces el seno de B:

$$senA = 3senB \to 2senA - 2senB = senA + senB \to 2(senA - senB) = senA + senB$$

Utilizamos ahora las indicadas fórmulas clásicas de factorización:

$$2(senA - senB) = senA + senB \to 4\cos\frac{A+B}{2}sen\frac{A-B}{2} = 2sen\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \to$$

$$\to 4\frac{sen\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = 2\frac{sen\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \to 2tg\frac{A-B}{2} = tg\frac{A+B}{2}$$

Deshaciendo ahora el cambio de variables:

$$A - B = 2a + b - b = 2a, \quad A + B = 2a + b + b = 2a + 2b$$

Finalmente:

$$2tg\frac{2a}{2} = tg\frac{2a+2b}{2} \to 2tga = tg(a+b)$$

PROBLEMA 194 (280421)
Sean *m* y *n* las raíces de la ecuación

$$ax^2+bx+c=0$$

Escribir la forma reducida de la ecuación cuyas raíces son m^3 y n^3, expresando los coeficientes en función de *a, b* y *c*.

RESOLUCIÓN:

$$ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)=0 \rightarrow \begin{cases} m.m=c/a \\ m+n=-b/a \end{cases}$$

Sea $x^2+b'x+c'=0$ la ecuación cuyas raíces son m^3 y n^3:

$$\begin{cases} b'=-(m^3+n^3) \\ c'=m^3.n^3 \end{cases}$$

se tiene:

$$c'=m^3.n^3=(m.n)^3=\left(\frac{c}{a}\right)^3=\frac{c^3}{a^3}$$

$$b'=-(m^3+n^3)=-(m+n)(m^2-mn+n^2)=\frac{b}{a}(m^2-mn+n^2)$$

pero es $m^2-mn+n^2=m^2+2mn+n^2-3mn=(m+n)^2-3m.n=\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}$

por tanto $b'=\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}\right)$

y la ecuación buscada es:

$$x^2+\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}\right)x+\frac{c^3}{a^3}=0$$

PROBLEMA 193 (310321)

Demostrar la divergencia de las series:

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots=\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

b) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots=\sum_{1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

RESOLUCIÓN:

a) Se tienen los términos de la suma:

$$u_1=\frac{1}{2},\ u_2=\frac{2}{3},\ u_3=\frac{3}{4},\ \ldots\ u_n=\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$$

y siendo $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ una condición necesaria (aunque no sea suficiente) para que la serie sea convergente, tal serie es divergente.

b) $S_n=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}-1\right)+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-\sqrt{1}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})=\infty$ y la serie es divergente

PROBLEMA 192 (030321)

Resolver las ecuaciones:

$$a)\ z^{i}=1+i, \quad b)\ senz=2i$$

siendo: $z\in C$ (números complejos), y $i=\sqrt{-1}$

RESOLUCIÓN:

a) tomando logaritmos: $z^{i}=1+i \rightarrow i.Lz=L(1+i)$

donde es $Lz=L\left|z\right|+i\arg z$, por lo que $L(1+i)=L\left|1+i\right|+i\arg(1+i)=$

$$=L\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=L\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}(1+8k)$$

por tanto: $i.Lz=L(1+i)\rightarrow Lz=-iL(1+i)=\frac{\pi}{4}(1+8k)-iL\sqrt{2}$

$$z=e^{Lz}=e^{\frac{\pi}{4}(1+8k)}.e^{-iL\sqrt{2}}=e^{\frac{\pi}{4}(1+8k)}.\left(\cos L\sqrt{2}-isenL\sqrt{2}\right)$$

Solución: $z=e^{\frac{\pi}{4}(1+8k)}.\left(\cos L\sqrt{2}-isenL\sqrt{2}\right)$

b) $senz=2i\rightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2i\rightarrow e^{iz}-e^{-iz}=-4\rightarrow e^{iz}-\frac{1}{e^{iz}}+4=0\rightarrow$

$$\rightarrow e^{2iz}-1+4e^{iz}=0\rightarrow\left(e^{iz}\right)^{2}+4e^{iz}-1=0$$

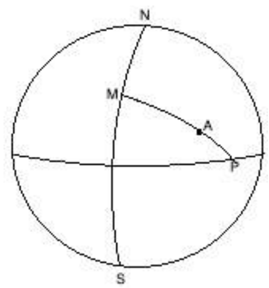
Haciendo el cambio $x=e^{iz}$ será: $x^{2}+4x-1=0$. Resolvemos:

$$x^{2}+4x-1=0\rightarrow x=-2\pm\sqrt{5}\rightarrow\begin{cases} e^{iz}=-2+\sqrt{5} \\ e^{iz}=-2-\sqrt{5}\end{cases}\rightarrow\begin{cases} zi=L(-2+\sqrt{5}) \\ zi=L(-2-\sqrt{5})\end{cases}$$

Soluciones: $z=2k\pi-L(\sqrt{5}-2),\quad z=(2k+1)\pi-iL(\sqrt{5}+2)$

PROBLEMA 191 (030221)

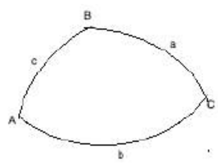
Desde un punto M de la Tierra, cuya latitud es 45º N, y cuya longitud es 0º, parte un avión hacia otro punto P, que està equidistante de los polos de la Tierra y del punto M. Pero se ve obligado a aterrizar en un punto A, a los 2/3 de su camino, y al este de M.



1) Hállense las coordenadas del punto A de aterrizaje.
2) Determinar el tiempo que tarda en llegar al punto A de aterrizaje si en el trayecto lleva una velocidad de 800 kms/hora.

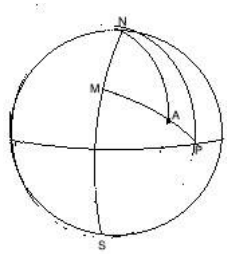
RESOLUCIÓN:

Podemos usar la fórmula de los cosenos para un triángulo esférico:



$$\cos a = \cos b . \cos c + sen b . sen c . \cos A$$

Consideremos los triángulos MNP y MNA. Será: MP=90º, MA=(2/3).90º=60º, NP=90º, MN=45º



1) Coordenadas del punto A de aterrizaje del avión:

Se tiene:
En el triángulo MNP:
$$\cos NP = \cos MP . \cos MN + sen MP . sen MN . \cos M$$
o sea:
$$\cos NP = \cos 90^{o} . \cos 45^{o} + sen 90^{o} . sen 45^{o} . \cos M$$
$$\rightarrow 0 = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos M \rightarrow \cos M = 0 \rightarrow M = 90^{o}$$
En el triángulo MNA:
$$\cos NA = \cos 60^{o} . \cos 45^{o} + sen 60 . sen 45 . \cos M$$
o sea:
$$\cos NA = \cos 60^{o} . \cos 45^{o} + sen 60 . sen 45 . \cos M \rightarrow \cos NA = \cos 60^{o} . \cos 45^{o} = 69^{o} 17' 42''$$
con lo que obtenemos la latitud del punto A de aterrizaje:

latitud(A)=90º-69º17’42”=20º42’17”

Puesto que el avión parte de un punto del meridiano 0º, bastará encontrar la longitud del meridiano que pasa por el punto de aterrizaje del avión, que vendrá dado por el ángulo N que forma dicho meridiano con el meridiano origen de 0º, por tanto, la longitud del punto A es el angulo N en el triángulo MNA:

$\cos MA = \cos NA . \cos MN + senNA . senMN . \cos N$

o sea: $0.5 = \cos(69º17'42").\cos 45º + sen(69º17'42").sen 45º.\cos N \rightarrow$

$\rightarrow \cos N = 0.3779616536 \rightarrow N = 67º47'32"$

que es la longitud del punto de aterrizaje:

longitud(A)=67º47’32”

Coordenadas de A: 20º42’17”N,67º47’32”E

2)Tiempo que tarda en aterrizar:

De la definición de velocidad: $t = e/v$, y puesto que el recorrido hasta el punto A es de 60º de círculo máximo: $e = \frac{60}{360} 2\pi R = 6614,3067\ kms$, R radio de la Tierra, se tiene:

$t = \frac{6614,3067}{800} horas = 8.267883375 horas = 8h, 16\text{m}, 4s, 38dec$

PROBLEMA 190 (060121)

Estudiar la convergencia de la siguiente integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$$

RESOLUCIÓN:

Dividiendo el intervalo [0,1]:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx\Big/\sqrt{1-x^2}}{x^{1/2}}$$

Esta integral tiene el numerador acotado en el intervalo [0,1/2] y el denominador tiene exponente menor que la unidad, por lo que la integral converge.

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}} = \int_{1/2}^1 \frac{dx\Big/\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{1-x}} = \int_{1/2}^1 \frac{dx\Big/\sqrt{x(1+x)}}{(1-x)^{1/2}}$$

Esta integral tiene asimismo acotado el numerador en el intervalo [½,1] y el denominador tiene exponente menor que la unidad, por lo que la integral también converge.

La integral dada I resulta ser suma de dos integrales convergentes, por lo que también es convergente.